

What the United States Can Learn From Singapore's **World-Class Mathematics System** המאמר נלקח מתוך
World-Class Mathematics System המופיע בשלמותו בכתובת
[www.air.org/news/documents/Singapore%20Report%20\(Bookmark%20Version\).pdf](http://www.air.org/news/documents/Singapore%20Report%20(Bookmark%20Version).pdf)

לנוחותכם הבאנו את עיקרי הדברים

AMERICAN INSTITUTES FOR RESEARCH®

מה ארצות-הברית יכולה ללמוד ממערכת הוראת המתמטיקה המצטיינת של סינגפור

תקציר מנהלים

מבוא

במבחני TIMSS (Trends in International Mathematics and Science Study) לשנת 2003 (מגמות בינלאומיות בלימודי מתמטיקה ומדעים), דורגו תלמידי סינגפור במקום הראשון בעולם במתמטיקה. תלמידי כיתות ח' בארצות-הברית דורגו במקום ה-16 מתוך 46 המדינות שהשתתפו (Mullis et al., 2004). הציונים של תלמידי ארה"ב היו בין הנמוכים ביותר במדינות המתועשות. הואיל ואין זה סביר להניח שתלמידי סינגפור ניחנו ביכולת מתמטית מולדת גבוהה מזו של תלמידי ארה"ב, נראה שמשהו בשיטה להוראת המתמטיקה שפותחה בסינגפור טוב יותר מאשר השיטה הנהוגה בארצות-הברית.

מחקר זה הוא מחקר ראשוני המשווה מאפיינים חשובים במערכת הוראת המתמטיקה בסינגפור לשיטה הנהוגה בארה"ב בכיתות בית הספר היסודי, בתקופה שבה אמורים התלמידים לבנות יסודות מתמטיים איתנים. הסקר מזהה את ההבדלים החשובים בין תוכניות לימודים, ספרי לימוד, בחינות הערכה והכשרת מורים בסינגפור לעומת ארצות-הברית. כמו כן אנו מציגים כאן תוצאות ראשוניות מארבעה אתרי ניסוי שבהם הוחל ללמד מתמטיקה על פי ספרי לימוד הנהוגים בסינגפור במקום ספרי המתמטיקה המקובלים.

מניתוח הנתונים עולה, שתלמידי סינגפור מצליחים יותר במתמטיקה מעמיתיהם בארצות-הברית משום שסינגפור פיתחה מערכת ברמה עולמית להוראת מתמטיקה, עם מרכיבי איכות שתכליתם לייצר תלמידים המסוגלים ללמוד מתמטיקה ברמה גבוהה ביותר. בין המרכיבים הללו תוכנית הוראת המתמטיקה הארצית של סינגפור, עם רכיבי הלוגיקה הרבים, ספרי לימוד עשירים המבוססים על פתרון בעיות, הערכות מתמטיקה מאתגרות, ומורים מוסמכים בעלי כישורים גבוהים ביותר, שהשיטה הפדגוגית שלהם מתרכזת בהוראה החותרת להקניית בקיאות. סינגפור מעמידה לרשות התלמידים המצטיינים פחות במתמטיקה מסגרת חלופית וסיוע מיוחד ממורים מומחים.

במערכת הוראת המתמטיקה של ארצות-הברית מרכיבים אלה חסרים. אין לה ליבה אחידה ומוגדרת של תכנים מתמטיים מוכתבים. ספרי הלימוד המקובלים מדגישים הגדרות ונוסחאות, ולא הבנה מתמטית. ההערכות אינן מאתגרות במיוחד, ומספר רב של מורים בארה"ב אינם מצוידים בהכנה מתמטית מספקת. במקרים רבים, התלמידים החלשים מקבלים סיוע מיוחד מסייעים וסייעות שאין להם אפילו תואר של בוגר קולג'. כתוצאה מכך, ארצות-הברית מייצרת תלמידים שלמדו רק יישום מכני של הליכים מתמטיים לפתרון בעיות שגרתיות, ועל כן אינם יכולים להתחרות במתמטיקה עם תלמידים ברוב המדינות המתועשות.

הניסיון שנצבר בכמה מאתרי הניסוי בארצות-הברית, שבהם לימדו מתמטיקה מספרי הלימוד של סינגפור מבלי ליישם היבטים אחרים של השיטה הסינגפורית, מדגים את האתגרים העומדים לפני המורה כאשר מעתיקים רק חלק מסוים מהשיטה הסינגפורית. התוצאות שהתקבלו רק מאששות את הממצאים ההשוואתיים שארצות-הברית תצטרך להביא בחשבון בבואה לחולל רפורמות מקיפות במערך הוראת המתמטיקה בבתי הספר שלה, אם ברצוננו להגיע להצלחה דומה לזו של סינגפור.

במערכת הוראת המתמטיקה של ארצות-הברית יש מאפיינים מסוימים שיכולים להיחשב עדיפים בהשוואה למערכת הסינגפורית, ובייחוד ההדגשה של מיומנויות חשיבה של המאה ה-21, כמו למשל היגיון ותקשורת, והתמקדות במתמטיקה שימושית. עם זאת, כדי שתלמידי ארה"ב יגיעו להישגים טובים בתחומים אלה, עליהם

להתחיל ביצירת מסד איתן של מיומנויות ומושגי ליבה מתמטיים, אשר על פי התקנים הבינלאומיים המקובלים, חסרים להם כיום.

הממצאים המרכזיים שלנו מראים את היתרונות שמקנים המרכיבים של מערכת הוראת המתמטיקה בסינגפור, בהשוואה למרכיבים דומים במערכת האמריקאית.

מסגרות

בבסיס השיטה של סינגפור עומדת מסגרת ארצית אחידה והגיונית מבחינה מתמטית, העוסקת בפיתוח מעמיק של נושאים בכל כיתה. המסגרת הנהוגה בסינגפור מציבה מערך מאוזן של עדיפויות מתמטיות המתמקדות בפתרון בעיות. היא כוללת דגש על מיומנויות חישוב, לצד תהליכי חשיבה מושגיים ואסטרטגיים יותר. המסגרת עוסקת באופן מעמיק במספר קטן יחסית של נושאים, ומפתחת אותם בהקפדה כיתה אחר כיתה בצורה ספירלית, כך שנושאים שנלמדו בכיתה נמוכה שבים ונלמדים בכיתות גבוהות יותר, אך ברמה מעמיקה יותר. התלמידים אמורים לרכוש בקיאות בתכנים הקודמים, ולא לחזור עליהם.

סינגפור ערה לכך שחלק מהתלמידים עשוי להתקשות יותר במתמטיקה, ומספקת להם מסגרת חלופית. בארה"ב אין הסדר דומה.

בסינגפור, המסגרת החלופית לתלמידים המתקשים במתמטיקה מכסה את כל הנושאים הכלולים בתוכנית הרגילה, אך בקצב איטי יותר ועם כמות גדולה יותר של חזרות. סינגפור מסייעת לתלמידים החלשים יותר בעזרה מצד מורים מוסמכים ובעלי הכשרה מתאימה. תוכנית הלימודים של NCTM (המועצה הארצית של מורים למתמטיקה) ותוכניות הלימודים של המדינות שבדקנו אינם מספקים שום מסגרת חלופית לתלמידים החלשים יותר במתמטיקה. יתרה מזו, במקרים רבים מכוונים את התלמידים הללו באופן לא רשמי למסלולי המתמטיקה האיטיים יותר, אך שלא כמו בסינגפור, התלמידים הללו לרוב אינם זוכים ללמוד את כל החומר הדרוש במתמטיקה. על פי ההערכות, נראה שבמקרים רבים הם מקבלים את שיעורי העזר מסייעי הוראה שאין להם תואר של בוגרי קולג'.

ספרי לימוד

ספרי הלימוד של סינגפור בונים הבנה עמוקה של מושגים מתמטיים באמצעות בעיות מרובות-שלבים ודוגמאות קונקרטיות המראות כיצד מושגים מתמטיים מופשטים משמשים לפתרון בעיות מהיבטים שונים.

הטקסטים בספרי הלימוד של סינגפור עשירים בפיתוח המבוסס על בעיות, בניגוד לטקסטים המקובלים בארה"ב. ספרים אלה מלאים בדוגמאות מהעולם האמיתי, ואלה משמשות בעיקר כדי להראות לתלמידים שלמושגים במתמטיקה יש ייצוג ממשי בעולם האמיתי.

הדוגמאות בספרי סינגפור כוללות גישה המתפתחת מהמוחשי, לציורי, למופשט. רבים מהתלמידים המתקשים בתפישת מושגים מתמטיים מופשטים יוכלו להפיק תועלת מייצוגים חזותיים של רעיונות מתמטיים. כחלק מגישה זו, הדוגמאות בספרי הלימוד בסינגפור מראות במתכונת גרפית את תהליך הפירוק, הייצוג והפתרון של בעיות מורכבות ומרובות שלבים.

ספרי הלימוד בסינגפור תואמים את המסגרת הארצית האחידה ובעלת הלוגיקה המתמטית. ולבסוף, ספרי הלימוד בסינגפור אינם חוזרים על תכנים שכבר נלמדו, משום שהתלמידים מגיעים עד בקיאות בחומר כבר במפגש הראשון שלהם עם התכנים הללו.

המורים

המורים בבתי-הספר היסודיים בסינגפור נדרשים למיומנויות מתמטיות גבוהות מאלו הנדרשות מעמיתיהם בארצות-הברית, עוד בטרם יתחילו בהכשרתם כמורים. בכל שלב בהכשרתם, לפני ההסמכה ולאחריה, הם מקבלים הוראה טובה יותר הן בתכנים המתמטיים והן בפדגוגיה של המתמטיקה.

המורים למתמטיקה בסינגפור נדרשים לעבור בחינה מחמירה בטרם יתקבלו לבית-ספר להוראה, ותוך כדי לימודיהם הם מקבלים שכר של מורה. לאחר הכנתם לתפקיד, המבוססת על תכנים, מעודדים את המורים למתמטיקה בסינגפור להמשיך ולהעמיק את הידע ואת המיומנות שלהם באמצעות חובת השתלמות מקצועית בהיקף של 100 שעות בשנה.

כל מרכיב במערכת החינוך של סינגפור מתוכנן כך שידגיש וישפר את המיומנות המתמטית של הלומדים ושל מוריהם.

במהלך דיון בקבוצת מיקוד, אמר אחד המורים, "התברר לי שאינני מבין מתמטיקה רק שנדרשתי ללמד מתמטיקה בעזרת ספרי הלימוד הסינגפוריים".¹ מורים אחרים בקבוצת המיקוד אישרו שעומק ההסברים והבעיות מרובות-השלבים והמאתגרות בספרי הלימוד הסינגפוריים חייבו אותם בהבנה מעמיקה ממה שהורגלו במושגים מתמטיים. הם גם גילו שעליהם להסביר לתלמידים את משמעות המתמטיקה שהם מלמדים, ולא להסתפק בהסברים מכניים בלבד.

המסגרת, או תוכנית הלימודים במתמטיקה, היא היסוד לכל שאר הרכיבים במערכת הסינגפורית. בסינגפור, הדגש המושם על חינוך נתפס כסיבה עיקרית להצלחתה הכלכלית של המדינה.

הביצועים המעולים של סינגפור במבחני TIMSS הוא אחד האינדיקטורים ליעילות מערכת החינוך שלה. בשנת 1999 הגיעו תלמידי כיתות ח' בסינגפור לציין הממוצע הגבוה ביותר מתוך 38 המדינות שהשתתפו במבחני TIMSS. 46% מהתלמידים בסינגפור דורגו בין 10% העליונים מכלל הנבחים, פי חמישה מהשיעור בקרב התלמידים האמריקאים (9%). אפילו התלמידים הסינגפורים מהרביעון התחתון הראו ביצועים טובים יותר מאשר שני שלישים מהתלמידים בארה"ב (Mullis, et al., 2000). בשנת 2003 שמרו תלמידי כיתות ח' בסינגפור על המקום הראשון בציונים ממוצעים מקרב התלמידים הנבחים מ-46 מדינות (Mullis, et al., 2004).

תלמידי סינגפור הראו ביצועים טובים בכל התחומים המתמטיים, ודורגו במקום הראשון או סמוך לו בכל תחומי התוכן המתמטי הנבדקים במבחני TIMSS: (1) שברים והבנת משמעות המספר; (2) מדידה; (3) ייצוג נתונים, אנליזה והסתברות; (4) גיאומטריה; (5) אלגברה (טבלה 1-2).

איך יכולה אומה קטנה, שעד לאחרונה נמנתה בין המדינות העניות בעולם, להגיע לציונים כה גבוהים בהישגים מתמטיים? אילו הם הגורמים המסבירים את הרמה העולמית של תלמידי המתמטיקה הסינגפוריים?

מורים. סינגפור מייחסת חלק גדול מהצלחתה החינוכית למורים. בסינגפור, המורים "הם בלב כל הפעילות החינוכית שלנו" (משרד החינוך, סינגפור, 2001c). על אף שהמורים בסינגפור מקבלים יסודות איתנים במתמטיקה בסיסית, רוב מורי המתמטיקה בבית הספר היסודי אינם מצוידים בתואר של בוגר קולג' עם ארבע שנות לימוד. בסינגפור, איכות ההוראה מבוססת על דרכים אחרות מאשר לימודי תואר פורמליים בתוכנית ארבע-שנתית.

תהליכים בעלי עדיפות

בסינגפור, התהליכים שמיוחסת להם עדיפות מוגדרים במסגרת מושגית (איור 1-3). העדיפות המרכזית היא פתרון בעיות מתמטיות.

כפי שאפשר לראות באיור 1-3, המסגרת המושגית של תוכנית הלימודים הסינגפורית במתמטיקה מגדירה ארבעה תחומי תוכן מתמטיים עליונים כבר בכיתות הנמוכות. תחומים אלה, שהסינגפורים מכנים 'מושגים', הם מספרים, גיאומטריה, אלגברה וסטטיסטיקה (משרד החינוך, סינגפור, 2001a):

- **אשכול המספרים** מתחיל במספרים שלמים, ועובר לשברים, שברים עשרוניים, מהירות, פרופורציות ואחוזים.
- **אשכול הגיאומטריה** מתחיל בצורות פשוטות, כמו מלבן, ריבוע, עיגול ומשולש, ובהמשך מציג צורות מורכבות יותר, כמו חצי עיגול וגזרות. לאחר מכן עוברים לייצוגים מורכבים יותר של זוויות וצורות תלת-ממדיות.
- **אשכול הסטטיסטיקה** מציג גרפים סטטיסטיים, החל בגרף תמונה בסיסי.
- **אשכול האלגברה**, שמתחיל בכיתה ו', מוגבל לתפיסה המקובלת של משוואות אלגבריות, המביעים את היחסים בין משתנים. בניגוד לכך, תוכנית NCTM האמריקאית כוללת תבניות מספריות בהגדרת האלגברה שלו, ומציגה רעיונות אלגבריים כבר בכיתות הנמוכות, כאשר התלמידים עדיין לומדים חיבור וחיסור.

¹ המורה השמיע את הערתו בראיון קבוצתי עם מורים ממערכת החינוך הציבורית במחוז מונטגומרי שבמרילנד, שהשתמשה בספרי לימוד המתמטיקה הסינגפוריים.

**איור 3-5. מסגרת הנושאים של סינגפור בתחום המספרים – כיתות א' עד ד'
ו-ה'ו' (מסלול רגיל)**

ו'	ה'	ד'	ג'	ב'	כיתה א'
מספרים: מספרים שלמים					
	<ol style="list-style-type: none"> 1. כתיבת מספרים וערך המקום עד 10 מיליון 2. קירוב ואומדנים 3. כפל וחילוק של מספרים ארבע-ספרתיים במספרים שלמים דו-ספרתיים 4. סדר פעולות חשבון 	<ol style="list-style-type: none"> 1. כתיבת מספרים וערך המקום עד 100,000 2. קירוב ואומדנים 3. גורמים וכפולות 4. כפל של מספרים: <ul style="list-style-type: none"> • ארבע-ספרתיים במספרים חד-ספרתיים • תלת-ספרתיים במספרים דו-ספרתיים 5. חילוק של מספרים ארבע-ספרתיים במספרים חד-ספרתיים וב-10 	<ol style="list-style-type: none"> 1. כתיבת מספרים וערך המקום עד 10,000 2. חיבור וחיסור של מספרים 4 ספרתיים 3. לוח הכפל עד 10x10 4. כפל וחילוק של מספרים תלת-ספרתיים במספרים חד-ספרתיים 5. מספרים זוגיים ואי-זוגיים 	<ol style="list-style-type: none"> 1. כתיבת מספרים וערך המקום עד 1,000 2. חיבור וחיסור של מספרים תלת-ספרתיים 3. כפל וחילוק ב-2, 3, 4, 5 ו-10 	<ol style="list-style-type: none"> 1. כתיבת מספרים וערך המקום עד 100 2. מספרים טבעיים ומספרים סודרים 3. השוואה וסידור 4. חיבור וחיסור עד 100 5. כפל של מספרים שמכפלתם עד 40 6. חילוק של מספרים עד 20
מספרים: שברים					
	<ol style="list-style-type: none"> 1. חיבור וחיסור של: <ul style="list-style-type: none"> • מספרים מעורבים • שברים בעלי מכנים שונים 2. מכפלה של שברים 3. מושג השבר כחילוק במספר שלם 4. חילוק של שבר אמיתי במספר שלם 	<ol style="list-style-type: none"> 1. חיבור וחיסור של: <ul style="list-style-type: none"> • שברים דומים • יחסים בין שברים 2. המכפלה של שבר אמיתי ומספר שלם 3. מספרים מעורבים ושברים מדומים 	<ol style="list-style-type: none"> 1. שברים שווי-ערך 2. השוואה וסידור של שברים לא דומים (בעלי מכנים שונים) 	<ol style="list-style-type: none"> 1. חלקים שווים של השלם 2. מושג השבר הפשוט 3. השוואה וסידור של שברים דומים (בעלי מכנה משותף) 	
מספרים: מספרים עשרוניים					
<ol style="list-style-type: none"> 1. ציון מספרים וערך המקום עד 3 מקומות אחרי הנקודה העשרונית 2. השוואה וסידור 3. חיבור וחיסור של שברים עד שני מקומות אחרי הנקודה העשרונית 4. כפל וחילוק של שברים עד שני מקומות אחרי הנקודה העשרונית במספר שלם חד-ספרתי 5. המרה של שברים עשרוניים לשברים פשוטים 6. עיגול לעשרות ואומדנים 	<ol style="list-style-type: none"> 1. כפל של שבר עד שני מקומות אחרי הנקודה העשרונית במספר שלם דו-ספרתי 2. כפל וחילוק של שבר עד שלושה מקומות אחרי הנקודה העשרונית בעשרות, מאות ואלפים 				
מספרים: ממוצע / הספק / מהירות					
<ol style="list-style-type: none"> 1. זמן (שעון 24 שעות) 2. מהירות 	<ol style="list-style-type: none"> 1. ממוצע 2. הספק 				
מספרים: יחס / פרופורציה					
<ol style="list-style-type: none"> 1. יחס יחס ישר 	<ol style="list-style-type: none"> 1. יחס 				
מספרים: אחוזים					
<ol style="list-style-type: none"> 1. כמות נתונה כאחוז של כמות אחרת 	<ol style="list-style-type: none"> 1. רעיון האחוזים 2. חישוב אחוז של כמות 				

מקור: משרד החינוך, סינגפור, 2001

אשכול המספרים מדגים את הלוגיקה של הגישה הספירלית. בשיטה הסינגפורית, מבנה התוכנית מבוסס תכנים הקשורים במספרים שלמים ומעמיק בהם:

- כתיבת מספרים וערך המקום מוצגים כבר בכיתה א', לאחר מכן סידור של מספרים ולאחר מכן ארבע פעולות החשבון. גבולות פעולות החשבון קבועים – חיבור וחסור בלבד, של מספרים קטנים מ-100, כפל שתוצאתו עד 40, וחילוק שתוצאתו עד 20.
 - בכיתה ב' מרחיבים את הכתיבה וההבנה של המספרים עד 1,000, ומוסיפים חיבור וחסור עד שלוש ספרות, וכפל וחילוק ב- 2, 3, 4, 5 ו-10.
 - תהליך הבנייה ההדרגתי של נושאים מתקדמים יותר בתחום המספרים ממשיך עד כיתה ה' וחושף את התלמידים למספרים עד 10 מיליון. רק לאחר יצירת בסיס איתן ביסודות האריתמטיקה מציגים לפניהם את נושא האומדנים (כיתה ד') וסדר הפעולות (כיתה ה').
 - לוח נושאי המשנה באשכול המספרים מציג סדר ברור ודומה של תנועה אלכסונית מהפינה הימנית העליונה ועד לפינה השמאלית התחתונה, ומדגים במתכונת גרפית כיצד בסינגפור בונים את התכנים החדשים על יסודות התכנים שכבר נלמדו:
 - מושג השבר מוצג כבר בכיתה ב', שברים שוויו-ערך וסידור שברים לפי גודלם נלמדים בכיתה ג', חיבור וחסור של שברים בכיתה ד', וכפל וחילוק של שברים בכיתה ה'.
 - יישומי שברים, כגון מספרים עשרוניים, מהירות ממוצעת, יחס ופרופורציה ואחוזים, נלמדים רק לאחר שהוקנו לתלמידים העקרונות הבסיסיים.
 - נושא המדידה, שבסינגפור מסווג בתחום המספרים, מתחיל ברעיונות פשוטים כמו אורך, משקל, זמן וכסף, ורק בשלב מאוחר יותר הלמידה מתמקדת בנושאים מורכבים יותר כמו היקף, שטח ונפח, ובפעולות אריתמטיות מסובכות יותר כמו כפל וחילוק של כסף.
- המסגרת הסינגפורית יוצרת רמת פירוט נוספת על ידי קביעת התוצאות המצופות מהתלמיד בכל נושא, על פי כיתות. הגדרת נושא מתמטי אינה מספיקה, אלא צריך להגדיר מה התלמיד אמור לדעת בכל נושא. לוח הנושאים מגדיר השוואה וסידור כנושא לכיתה א', אך גם מגדיר במפורש את התוצאות המצופות מהתלמיד בנושא זה: על התלמיד להיות מסוגל להשוות 'שני מערכים או יותר, במונחים של ההבדלים במספרים', וכן 'לסדר מספרים בסדר עולה ויורד' (משרד החינוך, סינגפור, 2001a). אזור 3-6 מציג את רמת הפירוט של תיאורי התוצאות בשיטה הסינגפורית. בכיתה א', בנושא החיבור והחסור באשכול המספרים, התלמיד אמור להשוות בין שני מספרים עד 20 ולזכור בעל פה קשרים עד $9 + 9$. אפילו בכיתה א' עוסקים התלמידים בפתרון בעיות מילוליות, אם כי מדובר בבעיות בנות שלב אחד בלבד.
- התיאורים ברמת הנושא וברמת התוצאות המצופות בסטנדרטים של התוכן במערכת הסינגפורית מראים כיצד הידע המתמטי של הלומד מתפתח על ידי הצגת נושאים ותוצאות ספציפיים, סדורים בסדר הגיוני. התכנים החדשים מעמיקים ומרחיבים את הידע הקודם.

איור 3-6. כיתה א', חיבור וחסור – נושאים ותוצאות במערכת הסינגפורית

הנושאים	התוצאות
חיבור וחסור	<p>הדגמת המשמעות של 'חיבור' ו'חסור' (כולל השוואה בין שני מספרים עד 20, ומציאת הפרש). כתיבת משפטים מתמטיים לייצוג סיטואציות נתונות הכרוכות בחיבור ובחסור. בניית קשרי החיבור עד $9 + 9$ ושינונם (כולל כתיבת סיפורים חשבוניים לתרגילים בגבול ה-10), כולל תרגילים כמו: $[] + 2 = 7$ (i) $3 + [] = 12$ (ii)</p> <p>הכרת הקשר בין חיבור וחסור. חיבור וחסור של מספרים - דו-ספרתיים והמספר אחד - דו-ספרתיים ועשרות - דו-ספרתיים ומספרים דו-ספרתיים חיבור של שלושה מספרים חד-ספרתיים. פעולות חיבור וחסור פשוטות בעל-פה עם - מספר דו-ספרתי ואחדות בלי המרה - מספר דו-ספרתי ועשרות פתרון של בעיות מילוליות בנות שלב אחד בנושאי חיבור וחסור (שימוש במספרים עד 20).</p>
מקור: משרד החינוך, סינגפור, 2001a	

מסקנות

המסגרת בסינגפור מציעה גישה מתמטית לוגית ביותר לקביעת סדר עדיפויות בנושאים מתמטיים ובתכנים בכיתות בית הספר היסודי. גישה זו מאזנת בין הבנת המושגים, מיומנויות חישוב, ואסטרטגיות של פתרון בעיות. הנושאים המתמטיים והתוצאות המצופות מוגדרים במדויק, והתכנים נחלקים לשכבות הגיל במבנה ספירלי המגביל את החזרה על נושאים שכבר נלמדו. התכנים שהתלמידים אמורים ללמוד בכיתות א' עד ו' יוצרים מסד איתן בנושא המספרים, ובמקביל אף מפתחים מושגים בסיסיים בגיאומטריה ובסטטיסטיקה. בהשוואה לתוכנית הלימודים של NCTM ולסטנדרטים הנהוגים בארצות-הברית, הדגש הייחודי שמושם בסינגפור על בעיות מילוליות חד-שלביות, עולה בקנה אחד עם הדגש על קידום הבנה מושגית באמצעות פתרון של בעיות חשיבה. סינגפור מציעה גם מסגרת מיוחדת לתלמידים החלשים יותר במתמטיקה, ומסגרת זו מגובה במדיניות המזמנת לתלמידים הללו סיוע מיוחד ממורים מומחים.

ספרי הלימוד

תכנים ומתודולוגיה

ספר טוב ללימוד חשבון בכיתות בית הספר היסודי אמור להכיל תכנים מתמטיים עשירים המותאמים לתוכנית הלימודים ומוצגים באמצעות גישות פדגוגיות בדוקות (AAAS, 2000). יש לבנות אותו כך שהתלמיד יסיים את הלימוד בו בהבנה לא המושגים המתמטיים עצמם לא רק בידע טכני של פתרון בעיות מתמטיות. ספר הלימוד אמור להכיל גם תרגילים מספיקים, כדי שהתלמיד יוכל לתרגל את המושגים המתמטיים שלמד.

הטקסטים בספרי הלימוד בסינגפור מכילים הצגה עניינית של המושגים והנושאים המתמטיים, מותווים בהתאם לתוכנית הלימודים הארצית. הספרים מכילים גם מערכי בעיות רבים. הספרים מסבירים את המושגים המתמטיים בראש ובראשונה באמצעות בעיות המדגימות אותם ממגוון של נקודות מבט שונות. גישה זו עולה בקנה אחד עם מחקרים המאשרים את ערכה של למידה המבוססת על פתרון בעיות, המחייבת את התלמיד לפתור סדרות רחבות של בעיות הכוללות יישומים שגרתיים ולא שגרתיים, במגוון רחב של הקשרים ממשיים (Bransford, Brown and Cocking, 2000).

ספרי הלימוד הסינגפוריים מכילים גם הסברים מתמטיים המתחילים בדוגמאות מוחשיות או ייצוגים גרפיים, ורק אחר כך מגיעים אל המושגים המופשטים יותר, טכניקה שמסייעת במיוחד לתלמידים המתקשים בהבנת מתמטיקה מופשטת (Devlin, 2000; Maccini & Gagnon, 2000). ספרי הלימוד בסינגפור מכילים תמונות שתכליתן לפתח יכולת היריסטית של גילוי עצמי, מיומנות שימושית במיוחד העוזרת לתלמיד להמחיש כיצד יש לתקוף בעיות מורכבות ולפרק אותן לחלקיהן.

ספרי הלימוד הסינגפוריים עוסקים ב-13 עד 15 נושאים מתמטיים בכל אחת משתי הכיתות הראשונות, וב-17 עד 19 נושאים בכיתות ה' ו-ו'. סדר הנושאים תואם את הגישה הספירלית המתחייבת מהגדרתה של מסגרת לימוד המתמטיקה בסינגפור. הנושאים המתמטיים הבסיסיים ביותר, כמו חיבור וכפל, נלמדים כבר בכיתות הנמוכות, וחוזרים בכיתות הבאות כדי להעמיק את ההבנה, ולאחר מכן פוסק העיסוק בהם. ספרי הלימוד של סינגפור מציגים נושאים מתקדמים כמו קירוב ואומדנים, נפח וצורות מוצקות בשלושה ממדים רק בכיתות הגבוהות של בית הספר היסודי. בהתאם לתוכנית הכוללת של סינגפור, ספרי הלימוד אינם עוסקים באלגברה עד כיתה ו'.

השיעורים בספרי הלימוד הסינגפוריים בנויים במטרה ליצור העמקה והבנה מושגית. ספרי הלימוד מבוססים על גישה המתחילה בייצוגים חזותיים (תמונות) של תכנים, ועוברת בהדרגה להפשטה כדי ללמד חשבון ומתמטיקה. כל שיעור מתחיל בהצגת הנושא, בעזרת איורים ומודלים המסבירים את המושג הבסיסי, ולאחר מכן על הלומד לבצע משימות למידה מוגדרות. משימות הלמידה מכילות תמונות ואיורים נוספים, המדגימים את האופנים השונים לחשיבה על המושג, וכן תרגילים מונחים שהתלמידים נדרשים לבצע כדי לרכוש בקיאות בנושא. חוברות העבודה מכילות תרגילים להשלמת השיעורים ומלוות כל אחד מספרי הלימוד הסינגפוריים. השיעורים כוללים מספר גדול ומגוון של תרגילים, שברבים מהם התלמיד מתבקש לבצע משימות לא שגרתיות, ולפתור בעיות מילוליות ברמת מורכבות גוברת.

השוואת כיתות א': הבנת משמעות החיבור

אחד המושגים המרכזיים הנלמדים בכיתה א' הוא החיבור ומשמעותו. החיבור נלמד במספר שיעורים. התלמיד מפתח תחילה הבנה בסיסית במשמעות החיבור (צירוף, שילוב), ולאחר מכן עובר לפיתוח בקיאות בעובדות בסיסיות הנוגעות לחיבור. שלושת שיעורי החיבור הראשונים בספר הלימוד הסינגפורי מדגימים את משמעות החיבור ומפתחים את בקיאות הילד בעובדות החיבור עד 10:

- שיעור חיבור הראשון, "סיפורי חיבור", משתמש בתמונות ובסיפורים חשבוניים המסבירים שחיבור פירושו "לצרף". התלמיד מתבקש בשיעור להמציא סיפורים שילוו את התמונות המתארות את עובדות החיבור, ולכתוב תרגילי חשבון מתאימים.
- בשיעור השני מעמיקים את ההבנה בעובדות החיבור, מציגים את רעיון ה"קשרים בין מספרים" (משפחת של עובדות) ומדגישים את חוק החילוף של החיבור.
- בשיעור השלישי, "שיטות חיבור נוספות", מסבירים שיטות חשיבה אחרות לגבי חיבור, כמו ספירה הלאה והשלמה ל-10, ומעמיקים את עובדות החיבור.
- התרגילים בחוברת העבודה משתמשים במשחקים ובתמונות כדי לחזור על שיטות החשיבה השונות על חיבור שהוסברו בשיעורים, וכדי לתת לילדים שפע של תרגול בפתרון בעיות בעזרת עובדות החיבור הבסיסיות.

השוואת כיתות ג': עובדות על כפל וחילוק

כדי ללמד את לוח הכפל ועובדות נוספות לגבי חילוק עד 10, ספר הלימוד לכיתות ג' בסינגפור מקדיש שיעור אחד לכפל וחילוק של 6, 7, 8 ו-9. התלמיד הסינגפורי כבר למד את חוקי הכפל עד 5 בספר הלימוד לכיתה ב', לכן הספר לכיתה ג' מתמקד בכפל ב-6, 7, 8 ו-9. לצורך ההשוואה, בדקנו שיעור המשתרע על פני חמישה עמודים, שכותרתו "כפל וחילוק ב-6", ושיעור בן ארבעה עמודים, שכותרתו "כפל וחילוק ב-7", ולצד 21 עמודי התרגול בחוברת העבודה.

השיעורים בספר הסינגפורי מראים את קשרי הגומלין בין עובדות הכפל ועובדות החילוק, ומשתמשים במודלים מסוגים שונים כדי לבאר את השיטות השונות לחישוב עובדות הכפל. מודלים של מערכים מראים כיצד לפרק את הכפל ב-6 וב-7 לעובדות שהתלמיד כבר אמור לדעת. חוק החילוף של הכפל והקשר בין כפל וחילוק מוסברים אף הם. השיעור מתרחב ומראה כיצד לכפול ולחלק מספרים תלת-ספרתיים ב-6 או ב-7. התרגילים בחוברת העבודה משתמשים במשחקים ובעיות מילוליות כדי לבסס את המושגים שנלמדו בפרק, וכדי לקדם את הזכירה של עובדות הכפל והחילוק.

הטקסט בספר הסינגפורי מרחיב את הוראת עובדות הכפל והחילוק להוראת כפל וחילוק של מספרים דו-ותלת-ספרתיים במספרים חד-ספרתיים ועושה זאת ביסודיות רבה. לשם כך מפורטים בספרים שרטוטים ומודלים רבים המסבירים את השיטות השונות לפתרון בעיות. כמו כן מצורפים תרגילים רבים, וביניהם בעיות מילוליות מורכבות ורב שלביות, המאפשרות לתלמיד לשכלל את מיומנותיו.

לסיכום, ניתוח השיעורים המיועדים לכיתות ג' מחזק את המסקנות מההשוואה של השיעורים לכיתות א'. החומר הסינגפורי מכיל מגוון רחב בהרבה של ייצוגים (מערכים, רשתות, מלבנים, סיפורי חשבון תרגילים ועובדות נלוות) ובעיות המתארות מצבים (טבעות על מקל וכו') הן כדי לפתח הבנה מושגית והן כדי להעניק לתלמיד מודלים מרובים לתרגול ולזכירה של עובדות. נוסף לכך, החומר הסינגפורי מדגיש באופן שיטתי את החיבורים בין כפל וחילוק כבר מההתחלה, בכל מספר ומספר.

השוואת כיתות ה': גרפים קוויים

הנושא הסטטיסטי היחיד בספרי הלימוד לכיתות ה' בסינגפור, ובחבורות העבודה הנלוות, הוא שיעור בודד על גרפים קוויים. השיעור מכיל גרף קווי אחד שנוצר על סמך טבלת נתונים שעניינה מספר האנשים שהשתמשו בבריכת שחייה בתקופה של 5 חודשים. שלושה גרפים קוויים דומים מראים נתונים על המרת דולרים של ארה"ב לדולרים סינגפוריים, ומלווים בשאלות על סדר הגודל של העלייה והירידה, ממוצע הסכומים, וכיצד לקרוא גרף קווי לינארי. השיעור מלווה בתרגילים בחוברת העבודה, שמכילה שישה גרפים קוויים דומים, שכל אחד מהם מלווה בשלוש עד חמש שאלות לגבי הבנת הגרפים, וכן בעיות המבוססות על הנתונים שבגרפים. הטיפול הסינגפורי בגרפים הקוויים אינטנסיבי, וחושף את התלמיד לגרפים ומחייב אותם לקרוא ולהבין אותם. השיעור על הגרפים מעמיק את מיומנות החישוב בעזרת שאלות לגבי ממוצעים, עלייה וירידה.

ושבו, פיתוח ההבנה של גרפים קוויים בחומר הלימוד הסינגפורי, נתמך בייצוגים ובהקשרים מרובים ובסדרה של שאלות שמחזקות מגוון רחב של מיומנויות ומושגים, שכולם רכיבים חשובים של היכולת להבין נתונים. התוצאה היא ייצוג עשיר בהרבה של הנושא בחומרי הלימוד הסינגפוריים.

סיכום - ספרים

בכל כיתה ובכל פרק ושיעור, ספרי הלימוד הסינגפוריים מציגים תכנים מתמטיים בהתאמה קפדנית לנושאים ולתוצאות שהוגדרו בתוכנית לימודי המתמטיקה של סינגפור. השיעורים ארוכים במונחים של מספר עמודים, וחושפים את התלמיד לפיתוח רחב של מושגים מתמטיים. ההבנה המושגית של התלמיד מתפתחת באמצעות שיעורים המסבירים את המושגים דרך תרגילים המבוססים על בעיות, המבארים כיצד המושגים הללו מיושמים

בהיבטים שונים, הן בדרכים שגרתיות והן בדרכים לא שגרתיות. הדוגמאות הקונקרטיות והמאוירות בספרי הלימוד הסינגפוריים הן בגדר הסברים חזותיים המסייעים לתלמיד להבין מושגים מתמטיים מופשטים. העזרים החזותיים הללו מעניקים לתלמיד כלים המסייעים לו לנסח, לייצג ולפתור סוגים שונים של בעיות מורכבות. סדרות הבעיות הגדולות והמאתגרות בספרי הלימוד הסינגפוריים מתגברות את ההבנה המושגית העמוקה ומסייעות לרצף של התהליכים.

מסקנות - מורים

המורים למתמטיקה בבתי-הספר היסודיים בסינגפור, כמו שאר מרכיבי מערכת הוראת המתמטיקה במדינה זו, עולים באיכותם הכוללת על עמיתיהם בארצות-הברית. בסינגפור, המערכת מייחסת למורים יוקרה גבוהה ומגבה את הערכתה כלפי המורים במחויבות לספק לציבור התלמידים מורים כשירים ובעלי הכנה טובה. בחינות הכניסה המחמירות מביאות לבחירת המועמדים המוכשרים ביותר מתוך מאגר הסטודנטים, שממילא הם בין הטובים בעולם במתמטיקה, וכל זאת לפני קבלתם לתוכנית להכשרת מורים. הממשלה משלמת למורים בתקופת הכשרתם, ותלמידי הוראה לכיתות היסודיות לומדים בתוכנית שעיקרה תכנים במתמטיקה ובתחומי דעת אחרים. בשנת ההוראה הראשונה שלהם, עובדים המורים החדשים פחות שעות ומקבלים הנחיה ממורה מומחה המשמש חונך. השתלמויות והמשך ההכשרה המקצועית מתבצעים באמצעות תוכנית פיתוח אישית, והמורים מתעדכנים ומשפרים את מיומנויותיהם הודות ל- 100 שעות של השתלמות מקצועית בשנה.

בסינגפור נבנתה מערכת ברמה עולמית להוראת מתמטיקה, שבה כל המרכיבים מתמקדים בהקניית בקיאות מושגית לתלמידים כדי לסייע להם בפתרון בעיות מתמטיות מאתגרות. ציבור המורים הסינגפוריים מקבל הכנה טובה. המורים מבינים את המושגים המתמטיים המאתגרים המוצגים בספרי הלימוד העשירים בבעיות לפתרון, ומסוגלים ללמד. התלמידים בסינגפור עובדים קשה בהכנה לקראת בחינות ההערכה שלהם, ובתי הספר מתוגמלים על שיפורים ביחס לרמה הארצית. כל המרכיבים הללו – ההוראה, ספרי הלימוד ובחינות ההערכה – מותאמים למסגרת לימודי המתמטיקה הארצית וההגייונית של סינגפור.

איור B3-3. מסגרת הנושאים של סינגפור בתחום המספרים – כיתות א' עד ד' ו-ה'ו' (מסלול רגיל)

ו'	ה'	ד'	ג'	ב'	כיתה א'
מספרים: מספרים שלמים					
	<ol style="list-style-type: none"> 1. כתיבת מספרים וערך המקום עד 10 מיליון 2. קירוב ואומדנים 3. כפל וחילוק של מספרים בני 4 ספרות במספרים שלמים דו-ספרתיים 4. סדר פעולות חשבוניות 	<ol style="list-style-type: none"> 1. כתיבת מספרים וערך המקום עד 100,000 2. קירוב ואומדנים 3. גורמים וכפולות 4. כפל של מספרים: <ul style="list-style-type: none"> • בני 4 ספרות • במספרים חד-ספרתיים • בני 3 ספרות • במספרים דו-ספרתיים 5. חילוק של מספרים בני 4 ספרות במספרים חד-ספרתיים וב-10 	<ol style="list-style-type: none"> 1. כתיבת מספרים וערך המקום עד 10,000 2. חיבור וחסור של מספרים בני 4 ספרות 3. לוח הכפל עד 10x10 4. כפל וחילוק של מספרים בני 3 ספרות במספרים חד-ספרתיים 5. מספרים זוגיים ואי-זוגיים 	<ol style="list-style-type: none"> 1. כתיבת מספרים וערך המקום עד 1000 2. חיבור וחסור של מספרים תלת-ספרתיים 3. כפל וחילוק בשורות 2, 3, 4, 5 ו-10 בלוח הכפל 4. חיבור וחסור של מספרים עד 100 5. כפל של מספרים שמכפלתם עד 40 6. חילוק של מספרים עד 20 	
כסף, מידות ומדידה					
<ol style="list-style-type: none"> 1. שטח והיקף של עיגול 2. שטח והיקף של צורות הקשורות לריבועים, מלבנים, משולשים ועיגולים 3. נפח של: <ul style="list-style-type: none"> • גוף המורכב מקוביות ומתיבות • נזל 	<ol style="list-style-type: none"> 1. המרת יחידות מידה עם מספרים עשרוניים ושברים 2. נפח של קובייה ותיבה 3. שטח של משולש 	<ol style="list-style-type: none"> 1. כפל וחילוק של אורך, מסה, נפח וזמן (ביחידות מורכבות) 2. כפל וחילוק של כסף (ביחידות מורכבות ובמספרים עשרוניים) 3. יחידות מידה של נפח: סמ"ק, ממ"ק 4. נפח של: <ul style="list-style-type: none"> • קובייה ותיבה • נזל 5. שטח והיקף של ריבוע, מלבן והצורות הקשורות 	<ol style="list-style-type: none"> 1. יחידות מידה <ul style="list-style-type: none"> • אורך: קילומטרים, מטרים, סנטימטרים • מסה: קילוגרמים, גרמים • זמן: שעות, דקות, שניות, ימים, שבועות, חודשים, שנים • שטח: מטר מרובע, סנטימטר מרובע • נפח: ליטרים, מיליליטרים 2. חיבור וחסור של אורך, מסה, נפח וזמן (ביחידות מורכבות) 3. חיבור וחסור של כסף (ביחידות מורכבות ובמספרים עשרוניים) 4. היקף של צורות המורכבות מקווים ישרים 5. שטח והיקף של: <ul style="list-style-type: none"> • ריבוע • מלבן 	<ol style="list-style-type: none"> 1. מדידות של: <ul style="list-style-type: none"> • אורך: מטרים, סנטימטרים • מסה: קילוגרמים, גרמים • נפח: ליטרים • זמן: שעות, דקות 2. חיבור וחסור של: <ul style="list-style-type: none"> • אורך • מסה • נפח 3. חיבור וחסור של כסף (ביחידות מורכבות) 	<ol style="list-style-type: none"> 1. מדידות של: <ul style="list-style-type: none"> • אורך • מסה ביחידות לא-סטנדרטיות (זמן (שעון 12 שעות)) • שעה מלאה • מחצית השעה 3. כסף <ul style="list-style-type: none"> • דולרים וסנטים • חיבור וחסור של כסף בדולרים בלבד או בסנטים בלבד
סטטיסטיקה					
<ol style="list-style-type: none"> 1. תרשימי עוגה <ul style="list-style-type: none"> • קריאה והבנה • פתרון בעיות 	<ol style="list-style-type: none"> 1. גרפים קווים <ul style="list-style-type: none"> • קריאה והבנה • פתרון בעיות 	<ol style="list-style-type: none"> 1. טבלאות <ul style="list-style-type: none"> • בנייה, קריאה והבנה • פתרון בעיות 2. גרף עמודות <ul style="list-style-type: none"> • בנייה, קריאה והבנה • פתרון בעיות 	<ol style="list-style-type: none"> 1. גרף עמודות <ul style="list-style-type: none"> • קריאה והבנה • פתרון בעיות 	<ol style="list-style-type: none"> 1. גרף תמונה עם קב"מ <ul style="list-style-type: none"> • בנייה, קריאה והבנה • פתרון בעיות 	<ol style="list-style-type: none"> 1. גרף תמונה <ul style="list-style-type: none"> • בנייה, קריאה והבנה
גיאומטריה					
<ol style="list-style-type: none"> 1. הזוויות בצורות הנדסיות 2. ייצוג דו-ממדי של גוף תלת-ממדי <ul style="list-style-type: none"> • מנסרה • פירמידה 3. רשתות של קובייה <ul style="list-style-type: none"> • תיבה • מנסרה • פירמידה 	<ol style="list-style-type: none"> 1. זוויות <ul style="list-style-type: none"> • זוויות על קו ישר • זוויות סביב נקודה • זוויות ישרות צמודות 2. מצפן בעל 8 כיוונים 3. התכונות של מעוין <ul style="list-style-type: none"> • מעוין • מקבילית • טרפז • משולש 4. שרטוט גיאומטרי: שרטוט של ריבוע, מלבן, מעוין, מקבילית 	<ol style="list-style-type: none"> 1. קווים מאונכים ומקבילים 2. זוויות במעלות 3. סימטריה 4. צורות הנדסיות <ul style="list-style-type: none"> • מלבן • ריבוע • מעוין • מקבילית • טרפז • משולש 5. תכונותיהם של: <ul style="list-style-type: none"> • ריבוע 	<ol style="list-style-type: none"> 1. מושג הזוויות 	<ol style="list-style-type: none"> 1. צורות <ul style="list-style-type: none"> • חצי עיגול • רבע עיגול 2. דוגמאות: דוגמאות שלמות על פי צורה <ul style="list-style-type: none"> • צורה • גודל • כיוון • שתיים מהתכונות דלעיל 3. קווים, עקומות ומשטחים 	<ol style="list-style-type: none"> 1. צורות <ul style="list-style-type: none"> • מלבן • ריבוע • עיגול • משולש 2. דוגמאות: דוגמאות שלמות על פי צורה, גודל, צבע

ו'	ה'	ד'	ג'	ב'	כיתה א'
	ומשולש ממידות נתונות 5. ריצוף	• מלבן 6. ייצוג דו-ממדי של גוף תלת-ממדי • קובייה ותיבה • גוף המורכב מקוביות			
שברים					
	1. חיבור וחסור של: • מספרים מעורבים • שברים לא דומים 2. מכפלה של שברים 3. רעיון השבר כחלוקה 4. חילוק של שבר אמיתי במספר שלם	1. חיבור וחסור של: • שברים דומים • שברים קשורים 2. המכפלה של שבר אמיתי ומספר שלם 3. מספרים מעורבים ושברים מדומים	1. שברים שווי-ערך 2. השוואה וסידור של שברים לא דומים	1. חלקיו השווים של השלם 2. מושג השברים הפשוטים 3. השוואה וסידור של שברים דומים	
ממוצע / הספק / מהירות					
1. זמן (שעון 24 שעות) 2. מהירות	1. ממוצע 2. הספק				
יחס / פרופורציה					
1. יחס יחס ישיר	1. יחס				
אחוזים					
1. כמות נתונה כאחוז של כמות אחרת	1. רעיון האחוזים 2. חישוב אחוז של כמות				
אלגברה					
1. משוואות עם נעלם אחד • פישוט • הערכה					
מקור: משרד החינוך, סינגפור, 2001					