תוכנית הלימודים במתמטיקה המוצעת לחטיבת הביניים –

סקירה ביקורתית והצעה חליפית

נוסח שני, 18 ביוני 2008

רון אהרוני, אורי און ותלמה גביש

תוכן עניינים

1. מבוא

משרד החינוך פרסם הצעה לתוכנית לימודים במתמטיקה לחטיבת הביניים, בקריאה לציבור המורים והמחנכים להגיב ולהעיר עליה. התוכנית עדיין לא אושרה סופית על ידי וועדת המקצוע, והיא אמורה להיות נתונה לביקורת ולשינויים. המסמך הנוכחי מכיל ביקורת כזו. הוא נכתב בהתנדבות, ללא אינטרסים אישיים, ומתוך דאגה לעתיד החינוך המתמטי העל-יסודי, עם השלכותיו על החינוך האוניברסיטאי.

על פי הניתוח שלנו התוכנית סובלת משלוש בעיות עיקריות:

(1) היעדר בנייה שיטתית והדרגתית של המושגים בכיתות ז' ו-ח'.

(2) בחירה ייחודית ושנויה במחלוקת של נקודת מוצא בלימוד הגיאומטריה (לימוד דרך זוויות ישרות ומלבנים) ושל מערכת דדוקטיבית (שבה "אקסיומת מלבן" מחליפה את אקסיומת המקבילים הרגילה).

(3) הדרך בה כתובה התוכנית, שבה דוגמאות מחליפות ארגון מסודר.

כדי להבהיר את השקפותינו צירפנו גם הצעה נגדית, של תוכנית חליפית (נספח). מטרתה העיקרית של התוכנית החליפית היא **להציג אלטרנטיבה לצורך דיון.** אנו מקווים שמורים יגיבו, יביעו את העדפותיהם, ושמשרד החינוך יבחן את התגובות האלה.

ידוע לנו שהנחת העבודה של משרד החינוך היא שהתוכנית תיכנס לתוקף, ובימים אלו כבר ניתנות עליה השתלמויות רבות ונכתבים על פיה ספרי לימוד. אבל לדעתנו עדיף לאבד מעט זמן עכשיו, מאשר ליצור בעיה שתיקונה יהיה קשה פי כמה לאחר שהתוכנית תכה שורש.

את התוכנית המוצעת על ידי משרד החינוך אפשר למצוא ב:

http://cms.education.gov.il/EducationCMS/Units/Tochniyot_Limudim/Math_Chatav/TochnitChadasha/TochnitChadasha.htm

2. תקציר מסקנות המסמך

א. מבנה תוכנית הלימודים המוצעת

התוכנית בנויה כשלד + דוגמאות. כשלעצמו, אין בכך חידוש - הדבר נהוג בתוכניות לימודים בכל העולם. אולם המקובל הוא שהדוגמאות נועדות רק להבהרה. בתוכנית של משרד החינוך ממלאות הדוגמאות תפקיד מרחיק לכת בהרבה. היחס בין כמות הדוגמאות לבין השלד גדול בצורה לא סבירה - השלד דל, והדוגמאות מרובות. הדוגמאות אינן מסודרות, והן בכיוון של גישה דידקטית שנקראת "חקר". מן הראוי היה לצמצם את הדוגמאות למינימום ההכרחי לצורך הבהרות של רעיונות שאינם חד משמעיים.

ב. אלגברה

התוכנית באלגברה נכתבה מתוך מטרה חשובה: לשנות את סגנון ההוראה, מלימוד שמבוסס ברובו על תירגול ללימוד עם הבנה. אלא שהיא סובלת משני ליקויים. הראשון הוא היעדר הדרגתיות. אין יישור קו בנוגע למושגים של בית-הספר היסודי, ותלמידי כיתה ז' נדרשים לצלול הישר למושגים המופשטים של פונקציה, מערכת צירים, ייצוג גרפי של פונקציה וקצב גידול של פונקציה. התוצאה היא עומס גדול מדי בכיתה ז'. הליקוי השני הוא הפיצול בין ה"תחום האלגברי" ל"תחום המספרי" – ירושה מן ה"תוכנית לפיתוח חשיבה כמותית". התוכנית שמה את שני התחומים זה בצד זה, בלי לציין סדר לימוד של הנושאים או קשרים לוגיים ביניהם.

הצעתנו, כפי שתפורט בהמשך, היא לכלול פרק של חזרה על החשבון של בית הספר היסודי מזווית אלגברית. הדבר יספק נחיתה רכה לאלגברה, ועם זאת ייתן מענה לבעיות שאותן מנסה ה"תחום המספרי" לפתור.

ג. גיאומטריה

מאחורי התוכנית המוצעת בגיאומטריה עומדים כמה עקרונות יפים ונכונים:

1) התחלת לימוד הגיאומטריה בכיתה ז'.

2) קישור לאלגברה דרך חישובים גיאומטריים.

3) חיבור לבעיות יחס, דרך דמיון מצולעים.

4) דגש על משפט פיתגורס.

5) לימוד השיטה הדדוקטיבית רק אחרי רכישת התנסות אינטואיטיבית במושגים.

אלא שבנקודה זו התוכנית עושה בחירה ייחודית, שלמיטב ידיעתנו אינה נקוטה בשום מקום בעולם: **ביסוס הגיאומטריה על זוויות ישרות.** הדבר מתבטא גם במושגים הנלמדים, וגם במערכת הדדוקטיבית. המושגים שבה פותחים בכיתה ז' הם המלבן, ואחר כך המשולש ישר הזווית. זאת, לפני המשולש הכללי. את ההגדרה הרגילה של מקבילות של ישרים (ישרים הם מקבילים אם אינם נפגשים) מחליפה הגדרה הנשענת על זוויות ישרות: שני ישרים הם מקבילים

אם הם ניצבים לישר שלישי. המערכת הדדוקטיבית מתבססת על אקסיומה שמחליפה את אקסיומת המקבילים המקובלת, שדרך נקודה שמחוץ לישר עובר מקביל אחד לישר, ב"אקסיומת המלבן": אם במרובע שלוש זוויות הן ישרות, אז גם הרביעית ישרה.

בעיה שנייה, שנובעת מן הבעיה הראשונה, היא שכמו באלגברה גם בגיאומטריה אין גישור לחומר של בית הספר היסודי, וחסרה בנייה שיטתית של המושגים הבסיסיים.

בסקירה עצמה נסביר מצד אחד את הרציונל שעומד מאחורי הבחירה הזאת, ומצד שני את הבעייתיות שבה. כאן נאמר רק שהעובדה שבכל העולם לומדים בגישה אחידה מעידה שיש בה היגיון. אפשר לנחש שבעוד זמן לא רב תתיישר ישראל שוב עם שאר העולם, ותחזור לגיאומטריה המקובלת. אם כך יהיה, משמעה של הבחירה הזאת יהיה אובדן של זמן ומאמץ.

ליקויים אחרים בתוכנית בגיאומטריה הם:

1) מיעוט בניות, ודחייתן לכיתה ט'. הבניות הן דרך המלך להבנת הגיאומטריה, והיו מועילות דווקא בעת לימוד המושגים הראשוניים.

2) היעדר המושג "מקום גיאומטרי".

3) דגש מועט מדי על המעגל, יחסית למרובעים, ולימודו מאוחר מדי.

4) לימוד נושאים קשים בגיאומטריה של המרחב מוקדם מדי, ללא הכנה.

ד. שעות ההוראה

נושא זה יופיע רק בתקציר ולא נתייחס אליו בהמשך. לדעתנו צריכה וועדת התוכנית להציב כתנאי לא יעבור את הגדלת מכסת השעות בכיתה ז' ל-5 שעות שבועיות. התוכנית כפי שהיא, ואף פחותה ממנה, אינה יכולה להיכנס לסד של 4 שעות שבועיות.

ה. הסתברות

בתוכנית מופיעות 16 שעות של הסתברות וסטטיסטיקה, 8 בכיתה ח' ו-8 בכיתה ט'. דעתנו היא שהתוכנית עמוסה גם כך, והעומס שמוסיפים שני הנושאים האלו אינו שווה במעט (מאוד) שהם מוסיפים. במקום להתמקד בעיקר, שהוא האלגברה והגיאומטריה, הילדים זוכים לטעימה מנושא שאינם יכולים להגיע בו לעומק של ממש במספר השעות המצומצם שניתן לכך ובמגבלות ידיעותיהם. אנחנו ממליצים להעביר את הנושא לחטיבה העליונה, שם יילמד במרוכז, עם קישור לקומבינטוריקה שנזנחה בשנים האחרונות.

3. מצב הוראת המתמטיקה בחטיבת הביניים בישראל

תוכנית הלימודים החדשה (להלן נתייחס אליה כאל "התוכנית המוצעת", או "התוכנית המוצעת על ידי משרד החינוך") נכתבה כניסיון לתת מענה לבעיות החמורות של החינוך המתמטי בחטיבת הביניים בישראל. לצורך התייחסות לתוכנית, וכרקע לתוכנית החליפית שנציע, נפתח בסקירה קצרה של בעיות אלה.

לחטיבה מגיעים תלמידים עם יכולות נבדלות מאוד. כמחצית מהם אינם מבינים לאשורו מהו "שבר", ויותר ממחצית אינם רגילים לבצע ולו גם את החישובים הפשוטים ביותר, והם מסתמכים לשם כך על המחשבון. חומרת החסרים שאיתם מגיעים תלמידי היסודי נחשפה בבחינות הבינלאומיות במתמטיקה של 1996, 1999 ו-2003. כצעד חירום הכניס משרד החינוך לחטיבה את ה"תוכנית לפיתוח חשיבה כמותית", שעיקרה חזרה על נושאים מבית-הספר היסודי: שברים, בעיות יחס, אומדן, שברים עשרוניים. במשך שנתיים אומצה מתכונת של לימוד התוכנית שעה אחת בשבוע. כמובן, הדבר קטע את רצף הלימודים של שאר הנושאים, וגזל שעה יקרה מתוך מאגר השעות הדל ממילא. לאחר מכן שונתה המתכונת, ומשרד החינוך כתב למורים הצעות באילו נקודות יש לשלב את נושאי ה"חשיבה הכמותית". ועדיין, ספרי הלימוד של ה"חשיבה הכמותית" נפרדים, ואין קשר אמיתי בין התוכנית לבין לימודי האלגברה. בבתי ספר רבים (ייתכן שברובם) נזנחה התוכנית לגמרי. בתוכנית המוצעת על ידי משרד החינוך מתבטאת ההתלבטות הזאת בחלוקה לעמודות – "תחום אלגברי" ו"תחום מספרי".

בעיה חמורה נוספת שמקורה בבית-הספר היסודי היא שבעקבות המעבר לעבודה יחידנית אין מקנים לילדים הרגלי דיון משותף. הילדים אינם רוכשים יכולת ריכוז והקשבה לדברי המורה ולדברי אחרים. התלמידים רגילים רק לעבוד בעצמם, ולפתור תרגילים. על כך נוספים שני קשיים שמוכתבים על ידי מגבלות תקציביות: דחיסת 40 תלמידים לכיתה, והקצבה של 4 שעות שבועיות בלבד ללימודי המתמטיקה. מתקציב זמן זעום זה נגזלות שעות רבות לצורך פעילויות בית ספריות.

התוצאה של כל אלה היא שאין לומדים, אלא רק מתרגלים. ישראל היא בוודאי המדינה המערבית היחידה (או אולי אף המדינה היחידה בכלל) שבה אין נהוגים ספרי לימוד אלא רק ספרי תירגול. כשאין לתלמידים כישורי דיון, כאשר הבדלי רמה מקשים על שיח כיתתי, וכאשר המורים מרגישים שהם חייבים להשלים חומר בזמן קצר, אין מלמדים. אין זה פלא ששני ניסיונות שינוי שנעשו מכיוון האקדמיה, "תוכנית הלימודים החדשה" של 1978 ותוכנית הלימודים של מכון וייצמן, נכשלו וכמעט לא זכו לדריסת רגל בבתי הספר. צורת הלימוד הרווחת כיום היא תירגול ללא הבנה, שתוצאתה היא מאיסה של התלמידים במקצוע, מה שגורר בעיות משמעת ושחיקה עצומה של המורים.

עם כל הבעייתיות שבהיעדר ספרי לימוד של ממש, ספרי התירגול הקיימים (כמו: גורן, אספיס, גבע ועוד) הם עוגן הצלה לחינוך המתמטי העל יסודי. הם נכתבים על ידי אנשים שמכירים את השטח, וכמענה לצרכים של השטח. והצורך העיקרי הוא **סדר**. כאשר אין זמן, אין בסיס של הבנה ואין דיון שיסדר את הרעיונות במוחם של התלמידים, חייב להיות ארגון. חייבת להיות

חלוקה מוגדרת היטב לנושאים, וחזרה על סוגים קבועים של תרגילים. את כל אלה מספקים הספרים האלו.

4. הדוגמאות בתוכנית וגישת החקר

לא במקרה הדגשנו לעיל את השיטתיות והסדר. הם קשורים לדמות שממלאת תפקיד מפתח בתוכנית הממלכתית המוצעת, גישת החקר. למען קוראי סקירה זו שאינם מעורים במגמות בעולם החינוך המודרני נספר כאן מעט על הגישה הזאת. הכרתה חיונית להבנת כל התפתחות במדיניות החינוך בכל העולם בעשורים האחרונים.

החקר היא מגמה שהגיעה מעולם החינוך האקדמי, ותפסה תאוצה ניכרת בשנות ה-80, כשאומצה על ידי ארגון המורים האמריקאי. לאמריקה יש השפעה רבה בעולם החינוך האקדמי, ותלמידי מחקר מכל העולם עושים שם את עבודת הדוקטורט שלהם, ולכן הגישה התפשטה במהירות לשאר ארצות תבל. "חקר" פירושו שהתלמיד אמור לבנות את הידע בעצמו (מכאן השם המקובל, "קונסטרוקטיביזם"). הרעיון הוא שהתלמיד אינו כלי קיבול לידע, אלא יוצר הידע. במקום שיעורים שבהם המורה מספר עובדות, התלמידים עוסקים בפעילויות שמהן הם אמורים לבנות מושגים ולהסיק מסקנות.

בכל העולם גרמה השיטה הזאת לאנדרלמוסיה עצומה ולמאבקים קשים של הורים ומדענים (ובמיוחד הורים שהם גם מדענים) שטענו שהשיטה מבלבלת ואינה בונה את הידע בצורה שיטתית והדרגתית. הפעילויות של התלמידים נעשות על פי סדר אקראי, ואינן מובילות לידע מסודר. לתלמיד חסר האלמנט התיווכי של מושגים שנמסרים לו על ידי המורה. בקליפורניה ובמסצ'וסטס, שתי המדינות המובילות בהי-טק באמריקה, נזנחה השיטה עקב הירידה בהישגי התלמידים. ההישגים חזרו ועלו תוך זמן קצר.

חלק גדול מן הדוגמאות הניתנות בתוכנית המוצעת על ידי משרד החינוך הן מסוג ה"חקר". המסר אינו למורים, אלא לספרי הלימוד. התוצאה תהיה לדעתנו אובדן סדר ושיטתיות בספרי הלימוד. כאמור, הסדר הקיים כיום בספרי התירגול המקובלים בבתי-הספר הוא אחד הדברים שמחזיקים את לימוד המתמטיקה בארץ.

תוכנית לימודים אמורה לומר מה ללמד, לא איך ללמד. לכן אנו ממליצים לצמצם את הדוגמאות למינימום. יש להשאירן רק במקומות של חשש לאי-הבנה.

5. אלגברה

התוכנית הממלכתית המוצעת באלגברה מושתתת על כמה רעיונות נכונים: ניסיון להסיט את החינוך המתמטי העל-יסודי מדרך ה"תרגול בלבד" שאליו פנתה בעשורים האחרונים; קישור למציאות; דגש על משמעות של ביטויים אלגבריים. עם זאת יש בה בעיות של סדר ודירוג. בחרנו להציג את הבעיות ואת הצעותינו החלופיות דרך התייחסות לכמה סוגיות.

א. הגישור בין בית-הספר היסודי והחטיבה

בכל העולם, ובוודאי בארץ, מתלבטים המורים בשאלה כיצד לגשר בין הידע הלקוי לעתים קרובות של בוגרי היסודי עם הנדרש בתחילת הלימודים בחטיבת הביניים. האם לחזור על החומר של היסודי או לא? מצד אחד, חזרה היא אובדן זמן ותועלתה לא תמיד ברורה, ומצד שני בנייה על יסודות רעועים בעייתית עוד יותר. למי שאינו מבין את משמעות פעולות החשבון סמלי האלגברה נותרים ריקים. מי שאינו מבין את מהות הכפל לא יבין את משמעותם של ביטויים כמו $3x$. רוב המורים נמנעים מחזרה, ומתחילים ישר באלגברה או במספרים מכוונים. בהמשך נתאר גישה שמיישרת קווים, ומעשירה גם את התלמידים החזקים: **חזרה על החומר של בית הספר היסודי מזווית אלגברית**. כלומר – חזרה על משמעות ארבע פעולות החשבון ועל השברים, כשלדיון במשמעות מכניסים גם משתנים. אחר כך אפשר ללמד עם נופך אלגברי גם את הנושאים האחרים של כיתה ז' – מספרים מכוונים וחזקות.

מסקנתנו היא שכדאי לנסות לספק בכיתה ז' נחיתה רכה אל האלגברה, דרך נושאים חשבוניים. תחילה נושאי בית-הספר היסודי (מה שמספק הזדמנות לבסס אותם), ואחר כך המספרים המכוונים והחזקות. נציין שבמידת מה התוכנית המוצעת עושה זאת. נעיר שהצגת מושג המשתנה דרך חוקיות בתופעות, כפי שמוצעת בתוכנית, נוסתה בספרי מכון וייצמן ולא זכתה להצלחה.

משמעות שנייה של הגישור המדורג ליסודי היא שאת הנושאים המופשטים של **הפונקציה, מערכת הצירים וייצוג גרפי של פונקציות יש לדחות לכיתה ח'.**

ב. מיומנות אלגברית

במקומות רבים הולכים כותבי התוכנית בכיוון מוכר בחינוך המתמטי, של הנעה דרך בעיות "מן החיים", או הליכה מן הסוף (המטרה) להתחלה. דוגמה ראשונה היא הבחירה להציג משתנים דרך גילוי חוקיות בתופעות. דוגמה שנייה - בכיתה ח' משמש משפט פיתגורס כמוטיבציה לניסוח האקסיומות, מתוך "הליכה לאחור". דעתנו היא ש**המוטיבציה הטובה ביותר היא ההבנה, והבנה נרכשת מתוך בנייה שיטתית של המושגים**. באלגברה משמעות הדבר הקדמת המיומנות האלגברית לנושאים מופשטים יותר. המיומנות האלגברית נחשבת אומנם (די בצדק) למשעממת. אבל אין לדלג עליה, כי היא פתח להבנה של הנושאים המהותיים יותר.

גם מכך המסקנה היא שכדאי להקדים חלק מנושאי המיומנות האלגברית לכיתה ז', ולדחות לכיתות ח' ו-ט' את הנושאים המופשטים יותר, של פונקציות, קצב גידול, מערכת צירים. **הדבר יפחית גם את העומס בכיתה ז', שנראה לנו מופרז.**

ג. מושג הפונקציה וייצוגה במערכת צירים

תלמידי ישראל, גם באוניברסיטאות, אינם מבדילים בין פונקציה ובין הגרף שלה. הם סבורים ש"פונקציה" פירושה "גרף". סימפטום מוכר לכך הוא הקריאה לפונקציה בשם " y ", ואינטרפרטציה של המשוואה " $y=x^2$ " כ: "הפונקציה y היא x^2", במקום הבנה שמדובר בגרף הפונקציה $f(x)=x^2$, כלומר אוסף הנקודות (x,y) המקיימות את הקשר $y=x^2$. כדי לפתור זאת נחוץ לעשות שלושה דברים:

1) מושג הפונקציה צריך להילמד תחילה לא בנוסח המספרי, כלומר כ"התאמה". פונקציה היא מכונה שמכניסים לה קלט והיא מוציאה פלט – למשל מכניסים לה מילה והיא מוציאה כפלט את האות הראשונה שלה.

2) לפני שלומדים את מושג הגרף של פונקציה, נחוץ ללמוד על מקומות גיאומטריים של נקודות (x,y) המקיימות משוואה מסוימת. כך יובן הרעיון שהגרף הוא אוסף נקודות המקיימות קשר מסוים.

3) בסופו של דבר התלמיד צריך להכיר את כל שלושת הייצוגים המקובלים בהוראת הפונקציות: גילוי חוקיות בתופעות במציאות, "מכונות" שמקבלות מספר אחד כקלט ומוציאות מספר אחר כקלט, וכתיבת ביטוי אלגברי והסבר כיצד מציבים בו מספרים.

ד. משוואה ריבועית מול חקירת פונקציות ריבועיות

בכיתה ט' נזנחת סוף-סוף בתוכנית החלוקה לשני תחומים, מספרי ואלגברי (כאמור, תוכנית ה"חשיבה הכמותית", שממנה נולד ה"תחום המספרי", הונהגה רק בכיתה ח', והבחינות הבינלאומיות אמורות כבר להיות מאחורי התלמידים בכיתה ט'). לעומת זאת, קורה דבר מוזר – התעמקות בנושא אחד, בצורה אקדמית, כמעט. הגישה יפה מאוד – הסתכלות בפונקציות ריבועיות כמתקבלות משלושה סוגי פעולות על הפונקציה הבסיסית $f(x)=x^2$: הזזה "אנכית" (הוספת קבוע), הזזה "אופקית" (החלפת המשתנה ב- $x-a$) וכפל בקבוע. זוהי גישה של מתמטיקאים. תלמיד שיבין כל זאת יבין עקרונות כלליים על פונקציות. אבל נראה לנו שהדבר תובעני ומעל לכוחותיו של תלמיד ממוצע. יש כאן עקבות של תוכנית לימודים למצוינים שנהוגה כיום בארץ, אבל יש לזכור שרוב התלמידים אינם מסוגלים להפשטה כזו.

אמביציוזית במיוחד היא הגישה של לימוד הפונקציה הריבועית לפני המשוואה הריבועית. מושג ה"משוואה ריבועית" פשוט יותר בגלל ההתמקדות במטרה, ומשום שהוא טכני יותר. פונקציה ריבועית היא אובייקט מופשט למדי. חלק מן השאלות על פונקציות ריבועיות (למשל, היכן המינימום, ציר הסימטריה של הפרבולה) יכולות להיות מובנות רק דרך השלמה לריבוע, והשלמה לריבוע טבעית יותר בהקשר של משוואות. אגב – דווקא השלמה לריבוע לצורך פתרון משוואות אינה מוזכרת וזוהי דרך המלך להוכחת הנוסחה הכללית של פתרונות המשוואה הריבועית.

אנו ממליצים על פתיחה במשוואה ריבועית, לימוד הפתרון דרך השלמה לריבוע, המעבר לצורה $a(x-x_1)(x-x_2)$, ונוסחאות ויאטה. רק אחר כך להגיע לפונקציה הריבועית.

ה. דמיון

אחד הרעיונות היפים בתוכנית הוא לימוד בעיות יחס דרך דמיון צורות. אנו ממליצים להעביר אותו בשלב ראשון ללימודי האלגברה, כחלק מבעיות היחס בכיתות ח'. את התוכן הגיאומטרי המרכזי, המצוי במשפט על התנאי ההכרחי והמספיק לדמיון משולשים, אפשר ללמד בכיתה ט', כחלק מן השיטה הדדוקטיבית.

ו. סיכום ההמלצות בדבר האלגברה

1) ביטול החלוקה בתוכנית ל"תחום אלגברי" ו"תחום מספרי", ושילוב הנושאים יחד.
2) הצגת האלגברה דרך חזרה על נושאי בית-הספר היסודי מזווית אלגברית.
3) הכנסת השימוש במשתנים גם דרך נושאי המספרים המכוונים והחזקות.
4) נושא מערכת הצירים והייצוג הגרפי של פונקציות צריך לעבור לכיתה ח'.
5) ללמד משוואות ריבועיות לפני חקירת הפונקציה הריבועית, כפי שמקובל יותר.

6. גיאומטריה

א. גישור בין היסודי והחטיבה

מצב הידע הגיאומטרי שאיתו מגיעים התלמידים מן היסודי רע עוד יותר מידיעותיהם בחשבון. בבית-הספר היסודי בארץ אין בניות. הילד אינו יודע להשתמש בסרגל ובמחוגה, ובוודאי שלא במד-זווית. היעדר הבניות מתבטא גם במישור המילולי – מי שלא למד לתאר בניות ולמלא הוראות של בנייה יודע פחות להמליל ולנסח מושגים. תחום אחר שבו יש חסר הוא המעגל. הילדים אינם מכירים את שמות חלקי המעגל והעיגול - גזרה, מקטע, משיק, זווית היקפית ומרכזית. אי ההוראה של ניסוחים מילוליים מתבטא בהיעדר חוקי שימור: מי שאינו יודע לנסח במפורש מהו "ריבוע" ומהו "מעוין" יחשוב שריבוע שעומד על קדקודו אינו ריבוע אלא "מעוין".

גם כאן, כמו באלגברה, דרוש קודם כל יישור קו, שפירושו חזרה עם ניסוחים מדויקים ומפורשים על מושגי היסוד – נקודה, ישר, קרן, זווית. הילד צריך לדעת מהם חיבור וחיסור קטעים, מה פירוש העתקת קטע, את מיון הזוויות (חדות, ישרות קהות), זוויות צמודות וקודקודיות, מצולעים מיוחדים ותכונותיהם (משולשים ומרובעים מיוחדים), המעגל על חלקיו. וגם כאן, כמו באלגברה, חזרה סתם, ללא תוספת חידוש, היא בעייתית. כפי שנסביר ביתר פירוט בהמשך, הפתרון הטבעי והפשוט ביותר בעינינו הוא לחזור על מושגי היסוד בצירוף בניות. בניות הן דרך המלך לקשר בין העין, היד, השפה והחשיבה. הן דורשות תיאורים מדויקים, ומעניקות התנסות בלתי אמצעית. היכרות מסוג זה עם המושגים היא הכנה חיונית ללימוד השיטה הדדוקטיבית, על מנת להפריד את הקושי התפיסתי בהכרת המושגים מהקושי הלוגי בדדוקציה.

היעדר הבניות הוא רק אחד הביטויים לאי ביסוס המושגים מבית-הספר היסודי. התוכנית פותחת בדיון של כ-10 שעות במלבן ובתיבה, כולל הגדרת מקבילות באמצעות ניצבות לישר שלישי (לכך נתייחס בהמשך), חישובי שטח מלבן ונפח תיבה בסיטואציות מהחיים עם דגש על בעיות חקר לא שיטתיות, והשוואה בין שטח פנים ונפח. אחר כך ישנו דיון במשולשים ישרי זווית, חפיפת משולשים ישרי זווית, גבהים במשולש, שטח משולש ותיכונים. רק לאחר כל אלו מתחיל דיון בקדקד, זווית, מדידת זווית, זוויות צמודות וקדקדיות וסכום זוויות במשולש.

מאלף להתבונן ב- 10 השעות הראשונות. ניכר שהושקעה מחשבה רבה בסיפוק הנעה מן החיים ובהמצאת בעיות יפות. אבל בהיעדר בסיס ובשלות של התלמידים, תרומתם של אלה דלה. הנה, למשל, בעיה מעמוד 12 בתוכנית לכתה ז':

דוגמה למשימת חקר:

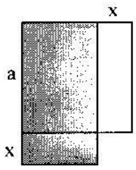
מבין כל המלבנים בעלי היקף נתון מצאו את המלבן בעל השטח המכסימלי.

שימו לב: מטרות המשימה הן:

א. פעילות חקר.

ב. הדגמת קשר בין אלגברה לגאומטרייה (לא לימוד נוסחאות).

התלמידים יחקרו השתנות שטח מלבן בעל היקף נתון וישערו מתי מתקבל השטח המכסימלי של מלבן כזה.



הערה: בשלב ראשון התלמידים יחקרו השתנות שטח של מלבנים שמידותיהם נתונות במספרים.

בשלב שני, יש לכוון להכללה של מסקנת החקירה.

התלמידים יכולים להצדיק את השערתם על סמך שיקולים גאומטריים.

נתבונן בסרטוט:

נצא מריבוע שאורך צלעו הוא a ונשווה את שטחו לשטח מלבנים שונים.

על מנת לשמור על היקף קבוע, נגדיל את אחת הצלעות של הריבוע ב-x ונקטין את הצלע האחרת ב- x. התקבל מלבן ששטחו: (a-x)(a+x).

המלבן התקבל מהריבוע המקורי על ידי הוספת מלבן שצלעותיו הן: x, a -x ושטחו $x(a-x)$ והחסרת מלבן שצלעותיו הן: x, a ושטחו xa. רואים שהתוספת קטנה מהחלק שנגרע ולכן מכל המלבנים שווי ההיקף, לריבוע יש השטח הגדול ביותר,

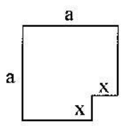
כלומר: $a^2 > (a-x)(a+x)$

קל לראות בסרטוט שהחלק שנוסף קטן מהחלק שנגרע ב – x^2 ולכן,

$a^2 - x^2 = (a-x)(a+x)$.

שימו לב: זהו מפגש ראשון של התלמידים עם הנוסחה. אין כוונה לעסוק בתרגול של הנוסחה בשלב זה.

הערה: משימה זו מקשרת בין גאומטרייה לאלגברת.

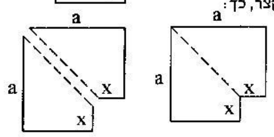


דרך נוספת להגיע לנוסחה $a^2 - x^2 = (a-x)(a+x)$

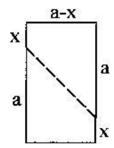
היא על ידי התבוננות במשושה שבסרטוט,

ששטחו $a^2 - x^2$.

נחתוך את המשושה לאורך האלכסון הקצר, כך:



משני החלקים שהתקבלו נבנה מלבן, כך:



שטח המלבן הוא $(a+x)(a-x)$.

ולכן מתקיים: $a^2 - x^2 = (a+x)(a-x)$

יש במשימה זו יופי, התנסות מוחשית וקישור לאלגברה. אבל היא מופיעה בשלב שבו התלמידים אינם בשלים להפיק ממנה תועלת, משום שעדיין אינם מבינים את הנוסחאות, בוודאי לא את אי-השוויון. מצוין במפורש: *"(לא ללימוד נוסחאות)"*, הדבר נוטל את הטעם מן המשימה, שכולה מבוססת על אי-השוויון $a^2 \geq (a-x)(a+x)$. זמן רב אובד על דוגמה שתרומתה תהיה בעיקר חרדה שנובעת מאי ההבנה.

ב. גישת המלבנים והרציונל מאחוריה

כפי שצוין בתקציר, התוכנית בוחרת בנקודת מוצא ייחודית מאוד: הזווית הישרה, ובמיוחד המלבן. כפי שכבר תיארנו, תחילתה של כיתה ז' היא בלימוד המלבן, התיבה, ומשולשים ישרי זווית. את הגדרת המקבילות של ישרים כאי פגישה שלהם היא מחליפה בהגדרה המקובלת פחות של "ניצבות לישר משותף". המשך לבחירה לפתוח במלבן היא בחירה במערכת אקסיומות ייחודית. אקסיומת המקבילים הרגילה (דרך נקודה שמחוץ לישר עובר מקביל אחד לישר) מוחלפת ב"אקסיומת המלבן" שמבוטאת בתוכנית כ"אם 3 זוויות במרובע הן ישרות, אז גם הרביעית ישרה". הנה הציטוט (תוכנית לכיתה ח', עמוד 23):

אקסיומת המלבן: אם למרובע שלוש זוויות ישרות אז גם הרביעית ישרה וכל שתי צלעות נגדיות שלו שוות זו לזו.

***הבהרה**: כללנו באקסיומת המלבן גם את שוויון הצלעות הנגדיות למרות שעקרונית ניתן להוכיח את שוויון הצלעות*

לפי עדותם של מחברי התוכנית, הבחירה במושגים הנלמדים ובמערכת הדדוקטיבית המיוחדת נועדה להקל על התלמידים. לטענתם העובדה שיותר תלמידים לומדים כיום מתמטיקה מבעבר דורשת גישה שבה אפשר להגיע גם למתקשים. הקלה זו מתבטאת בשני רבדים:

1) תפיסה
המלבן אכן פשוט יותר מן המשולש, והזווית הישרה קלה יותר לתפיסה מזוויות כלליות. ראשית – זוויות ישרות מוכרות לתלמיד היטב, משום שעולמנו מלא בזוויות ישרות. שנית - קל יותר לתפוס מקרה פרטי מאשר את המקרה הכללי. שלישית - במלבן יש רק שתי דרגות חופש (הוא נקבע על ידי שני נתונים – שני אורכי הצלעות) בעוד שבמשולש יש שלוש דרגות חופש. ולבסוף – מן המלבן קל יותר להגיע למדידות שטחים, נפחים וכן למשפט פיתגורס.

2) קיצורי דרך לוגיים
המערכת הדדוקטיבית המוצעת מקצרת את המרחק בין מושגי היסוד והאכסיומות אל המשפטים בשני אופנים.
א) ניסוח הגדרת המקבילים ואקסיומת המקבילים באמצעות מושגים מורכבים כמו זווית ישרה ומרובע במקום באמצעות מושגי היסוד נקודה וישר.
ב) הכללת משפט בתוך אקסיומת המלבן (כל שתי צלעות נגדיות שוות זו לזו).

ג. ההשלכות

כל זמן שהנושאים הנלמדים הם המלבן ומשולשים ישרי זווית, כמובן שלתלמידים אכן יהיה יותר קל. אלא שחשיבתם מוצרת והם אינם בונים אינטואיציה למשולשים כלליים. הזמן הארוך שהושקע בעצמים עם זוויות ישרות בא על חשבון ביסוס המושגים שפורטו בסעיף א'. הקושי שלכאורה נעקף יופיע מאוחר יותר וביתר שאת כאשר התלמידים יגיעו לחומר מתקדם יותר. יש לזכור שרוב מכריע של המשפטים והמושגים בגיאומטריה בנוי על משולשים ומעגלים ולא על מלבנים ומשולשים ישרי זווית.

תולדות החינוך (המתמטי והלא מתמטי) רצופות בנסיונות לקיצורי דרך, שלעולם אינם עולים יפה. כך לדעתנו יקרה גם במקרה זה. החיסכון הכרוך בלימוד המושגים הפרטיים יגבה מחיר של הצרת החשיבה, ואי פיתוח אינטואיציה למושגים הכלליים.

וישנו גם הצד האסתטי, שבמתמטיקה הוא כידוע מהותי. אקסיומה בסיסית ופשוטה היא אסתטית יותר מאקסיומה פרטית, אפילו אם השתיים שקולות לוגית (במסגרת מערכת של אקסיומות אחרות). בחירה באקסיומה הפרטית משמעה התחלה גבוה בעץ המושגים, מה שמוביל לאיבוד כל המושגים הקודמים. למתמטיקאים שבין קוראי מסמך זה אפשר לדמות את הבחירה באקסיומת המלבן להחלפת אקסיומת הבחירה בתורת הקבוצות בטענה השקולה לה, שלכל מרחב ליניארי יש בסיס. זה נכון לוגית, אבל אף אחד לא יחלום לעשות זאת. לא מקרה הוא שלאורך הדורות בחרו המתמטיקאים בנוסח הפשוט והאלמנטרי יותר של אקסיומת

המקבילים. מה עוד שאקסיומת המלבן המוצעת כוללת משפט דבר הסותר לחלוטין את עקרונות האקסיומטיקה.

התוצאה היא, אם כן, שמוחטאת לגמרי אחת המטרות המוצהרות המוזכרת במפורש בתוכנית: ללמד מהי מערכת דדוקטיבית.

דעתנו היא שקיצורי הדרך האלה לא יעזרו באמת לתלמידים החלשים, ויש דרכים פשוטות ומקובלות יותר להקל עליהם (למשל, לקבל חלק מן המשפטים ללא הוכחה). מצד שני אנו בטוחים שהם יפגעו בתלמידים החזקים יותר, שיגיעו ללימודי מתמטיקה וטכנולוגיה באוניברסיטאות ללא הכשרה מספקת.

ולבסוף, קשה לנו להאמין שבחירה באקסיומטיקה לא טבעית וייחודית תשרוד לאורך שנים. אנו מנחשים שבעוד שנים לא רבות תחזור ישראל ללמד כמו בכל העולם, עם האקסיומטיקה הרגילה. אם אכן כך יהיה, פירוש הדבר יהיה בזבוז של הרבה זמן ומאמץ.

ד. נושאים חסרים

מעבר לשתי המגרעות המרכזיות – היעדר שיטתיות בכיתה ז' הכוללת גישור ליסודי והבחירה במערכת הדדוקטיבית הייחודית – חסרים בתוכנית כמה נושאים שהיו נחלתם של בוגרי מערכת החינוך בעבר:

1) <u>בניות</u>
במהלך הסקירה הוזכר כבר אחד מחסרונותיה הבולטים ביותר של התוכנית המוצעת: **היעדר כמעט מוחלט של בניות.** הבניות שמופיעות מעטות, אלמנטריות ביותר, ומופיעות מאוחר מדי - בכיתה ט'. שם נלמדות העתקת קטע, חציית קטע, העתקת זווית, חציית זווית, העלאת אנך והורדת אנך – זה הכל.
הבניה הגיאומטרית מכילה כמה מרכיבים חשובים: ציור (קישור בין העין והיד), המללה (קישור בין השפה והמושג) והתנסות מוחשית שחיוניים להבנת הגיאומטריה.

2) <u>המעגל</u>
יש בתוכנית דגש מועט מדי על המעגל. הוא נעדר לגמרי מן התוכנית בכיתות ז' ו-ח', ומופיע רק בסוף כתה ט'. בכך יש פגיעה ברצף, שכן התלמידים ראו בביה"ס היסודי (גם אם באופן חלקי ולא שיטתי) את המעגל והעיגול. בנוסף, ללא המעגל קשה לעסוק בבניות.

3) <u>רשימה חלקית של נושאים נוספים</u>: הגדרה כללית של זוויות מתחלפות (יש התייחסות רק בישרים מקבילים, מה שאינו מאפשר לנסח את המשפט ההפוך למשפט על שוויון זוויות מתאימות או מתחלפות); קיום נקודות המפגש של קווי הלוואי; מעגלים חוסמים וחסומים; מקומות גיאומטריים.

.

ה. סטריאומטריה

בשני מקומות בתוכנית נלמדת גיאומטריה של המרחב. בכיתה ח' – שימושים של משפט פיתגורס, ובכיתה ט' – הכדור, יחד – 12 שעות. זאת, כאשר הגיאומטריה של המישור עדיין לא מבוססת. לדעתנו זוהי טעות. ידוע לנו שמקור הרעיון הוא בתלונה של מורי החטיבה העליונה, שאין מלמדים שם סטריאומטריה. הפתרון של התוכנית הממלכתית המוצעת, להעביר זאת לכיתה ח' ו-ט' אינו הגיוני. נזכיר שחמור מזה כבר נעשה – מסיבה דומה העבירו את נושא נפח הכדור לבית-הספר היסודי. את הסטריאומטריה יש ללמד בחטיבה העליונה, לאחר שגיאומטריית המישור, במיוחד המעגל, מבוססת היטב. מצד שני, אנו סבורים שכדאי לפתח את הרעיון הנכון המופיע בתוכנית, של שילוב הגיאומטריה עם המדידות. כדאי לכלול בתוכנית החטיבה את נושא נפחיהן של תיבות, גלילים ומנסרות. נושאים אלו נלמדו כביכול בכיתה ו', אבל למעשה ללימוד זה לא היה ערך משום שהוא נעשה ללא הכנה אלגברית, והוא נלמד בסוף השנה, כך שאין סיכוי רב שנלמד לעומק.

נספח – תוכנית לימודים חליפית מוצעת

תוכנית לימודים חליפית באלגברה

כתה ז'

1. חזרה על פעולות החשבון מזווית אלגברית

<u>עקרון מנחה</u>: לימוד מחדש של כמה עקרונות של החשבון, בתוספת נופך אלגברי, כנחיתה רכה אל האלגברה.

א. הצגת מושג ה"משתנה" ודיון ראשוני בו מלווה בדוגמאות. מהי האלגברה (קריאה למספרים בשמות).

ב. משמעות החיבור, החיסור והכפל. "אם ליוסי יש a תפוחים ולרבקה יש b תפוחים, כמה יש להם יחד?". חוק החילוף של החיבור, עם ביטוי אלגברי והסבר מוחשי (החלפת סדר בין קבוצות של עצמים).

ג. חוק החילוף של הכפל, עם הוכחה ועם ניסוח אלגברי.

ד. שתי המשמעויות של החילוק (חילוק לחלקים וחילוק להכלה).

ה. סדר הפעולות. ביטויים מספריים.

ו. <u>משמעויות השבר</u>:

- השבר כתוצאת צירוף של שתי פעולות – חילוק וכפל (5/8 משלם מתקבל על ידי חילוק השלם ב-8 וחזרה על השמינית המתקבלת 5 פעמים).
- שבר מצורה, מקבוצה וממספר טהור.
- שבר כיחס.
- קו השבר הוא קו חילוק.
- הרחבה וצמצום של שברים. הוכחה על ידי דוגמה.
- ההסבר לכפל בשבר יסודי (עם מונה 1), ולחילוק בשבר יסודי (בעזרת חילוק להכלה). כפל וחילוק שברים.
- השלם על פי החלק והשבר שמהווה החלק (אם 2/5 ממספר הם 30, מהו המספר?).

ז. בעיות של יחס ישר – קניות, תנועה (בעיות יחס מורכבות יותר, כמו תערובת ובריכה, יופיעו בכיתה ח').

ח. בעיות יחס ישר דרך דמיון של צורות.

ט. תפקיד הסוגריים: פתיחת סוגריים בביטויים כמו $7-(5-2)$, תפקיד קו השבר כסוגריים.

י. חוק הפילוג, עם ניסוח אלגברי.

2. מספרים מכוונים

א. היכרות – משמעויות שונות (חוב, טמפרטורה, גובה מתחת לפני הים, קומות מתחת לפני הקרקע, תאריכים לפני הספירה).

ב. שלוש המשמעויות השונות של הסימן "-": פעולה, סימן של כיוון (3- מציין "מינוס 3") ואופרנד (פעולה יונרית, ב (3-)- סימן המינוס השמאלי הוא פעולה שהופכת את הסימן).

ג. הסדר בין מספרים מכוונים (7- קטן מ 5-).

ד. הנגדי למספר נתון.

ה. פעולות במספרים מכוונים. הרחבת המספרים המכוונים למספרים רציונליים.

ו. ערך מוחלט. הערך המוחלט כמרחק בין מספרים מכוונים (ערך מוחלט של הפרש בין מספרים מכוונים הוא המרחק ביניהם על ציר המספרים).

3. חזקות

א. החזקה ככפל מקוצר.

ב. סדר הפעולות עם חזקות. הרעיון "ככל שהפעולה חזקה יותר כך היא קודמת".

ג. חזקות עם בסיס כלשהו (טבעי, שבר ומכוון) ומעריך טבעי.

ד. חזקות עם מעריך 0 ומעריך שלם שלילי.

ה. חוקי חזקות:

- מהו $a^m \times a^n$? כפל חזקות בעלות אותו בסיס. מנה של חזקות בעלות אותו בסיס.

- מהו $(a^m)^n$? חזקה של חזקה.

- מהו $a^m \times b^m$? מכפלה של חזקות עם אותו מעריך. מנה של חזקות עם אותו מעריך.

- הנוסחה $a^{-b} = \frac{1}{a^b}$ מתיישבת עם כללי החשבון בחזקות.

4. מיומנות אלגברית - התחלה

א. חד איבר, רב איבר.

ב. פתיחת סוגריים.

ג. קיבוץ סוגריים.

ד. כפל חד איבר בחד איבר, חד איבר ברב איבר, רב איבר ברב איבר, נוסחאות הכפל.

5. משוואות

א. מושג ה"נעלם" וההבדל בינו ובין "משתנה".

ב. פתרון משוואות – על ידי היפוך של פעולות (אם מ- x הגענו ל-10 על ידי הוספת 3, אז מ-10 נגיע ל- x על ידי החסרת 3).

ג. פתרון משוואות על ידי פעולות שוות בשני האגפים.

6. שורשים – היכרות ראשונית

א. מובן השורש. הסימון לשורש. השורש כפעולה הפוכה לחזקה.

ב. הפתרון השלילי למשוואה $x^2 = a$. השורש מוגדר כפתרון החיובי.

ג. אי קיום שורשים ריבועיים (ממשיים) למספרים שליליים.

ד. שורש של מכפלה ושל מנה.

ה. מושג השורש השלישי, בדוגמאות.

כיתה ח'

1. הפונקציה – היכרות ראשונית

א. פונקציה כמכונה שמקבלת קלט ומוציאה פלט. דוגמאות: הפונקציה שמקבלת ארץ ומוציאה כפלט את עיר הבירה שלה; הפונקציה שמקבלת מילה ומוציאה כפלט את האות הראשונה שלה; הפונקציה שמקבלת כקלט מקום ומוציאה כפלט את הגובה שלו מעל פני הים.

ב. פונקציות מספריות. דוגמאות: הפלט הוא המספר + 1; המספר + 2; 2 פעמים המספר; מינוס המספר, וכו'.

ג. פונקציות שנתונות על ידי ביטוי אלגברי.

ד. פונקציה שערכי המשתנה שלה הם מספרים ממשיים (ולא רק מספרים טבעיים).

2. מיומנות אלגברית – המשך

א. צמצום והרחבה של שברים אלגבריים.

ב. חיבור, חיסור, כפל וחילוק של שברים אלגבריים.

ג. הנוסחה לריבוע של סכום. הוכחת משפט פיתגורס בעזרתה.

ד. הנוסחה להפרש ריבועים.

3. מערכת צירים

א. לימוד מעלות אורך ורוחב בגלובוס. (מיקומה של ישראל, קו המשווה, מציאת שיעוריהן של נקודות בגלובוס והתהליך ההפוך, של מציאת נקודות על פי שיעוריהן) הערה – לנושא זה יש כמובן ערך של השכלה כללית, מעבר לרעיון של מערכת צירים.

ב. המערכת הקרטזית. השמות "ציר x" ו"ציר y". מציאת שיעוריהן של נקודות, ומציאת נקודות על פי שיעוריהן.

ג. מקום גיאומטרי של נקודות שמקיימות תנאי: אוסף הנקודות (x,y) שבהן $x=0$, אוסף הנקודות שבהן $x=3$, אוסף הנקודות שבהן $y=3$, אוסף הנקודות שבהן $y=x$, אוסף הנקודות שבהן $y=x+1$, אוסף הנקודות שבהן $x+y=0$, אוסף הנקודות שבהן $x+y=3$.

ד. ייצוג גרפי של פונקציות.

4. פונקציות ליניאריות

א. פונקציות ליניאריות והגרף שלהן.

ב. משמעות נקודת החיתוך עם ציר x .

ג. משמעות נקודת החיתוך עם ציר y .

ד. קצב שינוי של פונקציה ליניארית. פונקציה עולה ופונקציה יורדת, והקשר לפרמטר a בנוסחה $f(x)=ax+b$.

ה. אי-שיוויונים ליניאריים.

5. העשרה

א. הרעיון שסדרה היא למעשה פונקציה על המספרים הטבעיים (סידרה $a_1,a_2,a_3,...$ היא בעצם פונקציה $f(1), f(2), f(3),...$).

ב. דוגמאות "מן החיים" לסדרות ולפונקציות.

כיתה ט'

1. מערכות של משוואות בשני נעלמים

א. משוואה אחת בשני נעלמים – קיומם של אינסוף פתרונות, והרעיון שאפשר לבחור את אחד הנעלמים כרצוננו, והשני נקבע לפיו.

ב. שתי משוואות בשני נעלמים, שהאחת מהן היא מהצורה $x=5$ (נאמר): הקשר לסעיף א.

ג. שתי משוואות בשני נעלמים: 1) פתרון בעזרת חילוץ. 2) פתרון בעזרת השוואת מקדמים.

ד. מקרים מנוונים: מקרה ראשון – משוואות שקולות (שנותנות למעשה משוואה אחת), מקרה שני – משוואות סותרות.

ה. פתרון מערכת משוואות בייצוג גרפי. המובן של שלושת המקרים (פתרון יחיד, אינסוף פתרונות, אף פתרון).

ו. משוואות פרמטריות (כלליות).

2. משוואות ריבועיות

א. המשוואה $x^2 = a$, ל- a חיובי. הרעיון שלמשוואה ריבועית יכולים להיות שני פתרונות. הגדרה: $\sqrt{a}$ הוא המספר החיובי שפותר אותה (זוהי נקודה שמבלבלת הרבה תלמידים – הם חושבים ש- $\sqrt{9}$ יכול להיות גם -3).

ב. המשוואה $x^2 = 9$ כ: $x^2 - 9 = 0$, השימוש בנוסחה להפרש ריבועים והמעבר ל: $(x-3)(x+3) = 0$, שני הפתרונות שמתקבלים מן הצורה הזאת (זוהי הקדמה לסעיף הבא).

ג. המצאת משוואה ריבועית שפתרונותיה הם 3 ו- 4 (לדוגמה).

ד. המשוואה $(x+e)^2 = f$. העובדה שהאמצע בין שני הפתרונות הוא במרחק $\sqrt{f}$ משניהם.

ה. השלמה לריבוע במשוואות מנורמלות (כלומר שהמקדם של x^2 בהן הוא 1). הנוסחה לפתרון.

ו. הנוסחה לפתרון במשוואות כלליות, לא מנורמלות: $ax^2 + bx + c = 0$.

3. הפונקציה הריבועית

א. הביטוי במשוואה ריבועית הוא פונקציה.

ב. הפונקציה $f(x) = x^2$ ותיאורה הגרפי.

ג. הפונקציה $f(x) = x^2 - k$ ותיאורה הגרפי. משמעות נקודות החיתוך עם הצירים.

ד. הפונקציה $f(x) = (x+e)^2 - k$. נקודות ההתאפסות. המושג "שורש" של פונקציה $g(x)$ (שהוא פתרון המשוואה $g(x) = 0$. תלמידים מבלבלים בין המושגים "פתרון" ו"שורש")

ה. העובדה שנקודת המינימום של הפונקציה $f(x) = (x+e)^2 - k$ היא $x = -e$, משתי זוויות: האחת – הריבוע הוא מספר חיובי. השנייה – זוהי נקודת האמצע בין שני השורשים.

ו. פונקציה ריבועית כללית $f(x) = ax^2 + bx + c$. מתי פרבולה פונה כלפי מעלה, ומתי כלפי מטה.

ז. נקודת המינימום (או המקסימום) של פונקציה ריבועית כללית.

ח. נוסחאות ויאטה.

ט. הזזות אנכיות, אופקיות ומתיחות על הפונקציה $f(x) = x^2$.

4. אי-שיוויונים

א. חזרה על אי-שיוויונים ליניאריים.

ב. אי-שיוויונים עם ערכים מוחלטים.

ג. אי-שיוויונים ריבועיים.

תוכנית לימודים חליפית בגיאומטריה

כתה ז'

<u>עקרון מנחה</u>: חזרה ולימוד שיטתי של המושגים בגיאומטריה עם מרכיב חדש: בניות.

1. מושגים בסיסיים

א. ישר, קטע. העברת ישר דרך שתי נקודות באמצעות סרגל. הרעיון שיש רק ישר אחד שעובר דרך שתי נקודות נתונות.

ב. זווית. זוויות צמודות, זוויות קדקודיות, סכום והפרש של זוויות.

ג. זוויות בין מחוגי השעון, וקישורם לשברים. למשל: מה הזווית בין שני מחוגי השעון.

ד. קווים מקבילים - ציור, דיון, הגדרה.

ה. בניות בסיסיות עם סרגל – בניית ישר מקביל לישר נתון (אין צורך בשיטה מדויקת – למשל מספיק שיבנה שתי נקודות במרחקים שווים מן הישר הנתון, על ידי העלאת אנכים בצורה לא מדויקת ומדידת המרחק לאורכם, והעברת ישר דרכם).

ו. הדרך הקצרה ביותר בין שתי נקודות היא ישרה (ללא הוכחה, התנסות בלבד, במציאות ועל נייר). הדרך הקצרה ביותר מנקודה לישר שאינו עובר דרכה מאונכת לישר (כנ"ל).

ז. חזרה כוללת על משולשים ומרובעים (מיון משולשים ומרובעים ותכונותיהם).

ח. הגדרה וזיהוי של זוויות מתאימות, מתחלפות וחד צדדיות (לאו דווקא עם ישרים מקבילים). חישובים של זוויות מתאימות, מתחלפות וחד צדדיות בישרים מקבילים.

2. המעגל

א. הגדרת המעגל. ההבדל בין "עיגול" (שהוא הפנים של המעגל) ו"מעגל" (השפה).

ב. מושגים: רדיוס, מיתר, קוטר, זווית מרכזית, זווית היקפית , גזרה, קשת, מקטע, משיק.

ג. חישובים ונוסחאות: אורך מעגל, הגדרת המספר π.

ד. אורך קשת, שטח והיקף של גזרה ומקטע,

ה. חישובים, המשך: מהיקף העיגול לרדיוס, מרדיוס להיקף.

3. בניות

א. העתקת קטע, חציית קטע, העתקת זווית. בניית סכום של שתי זוויות נתונות.

ב. העלאת אנך, הורדת אנך, העמדת אנך אמצעי של קטע, חציית זווית כולל תיאור בנייה.

4. קווי הלוואי של המשולש

א. הגדרת קווי הלוואי של המשולש במשולשים חדי זוויות, ישרי זווית וקהי זווית : חוצי זוויות, אנכים אמצעיים, גבהים, תיכונים. בנייה של הנ"ל.

ב. מעגל חוסם וחסום. בנייתם.

ג. מפגשי קווי הלוואי.

5. חישובי שטחים

א. שטח של ריבוע, הגדרת שטח. חישוב צלע על פי שטח.

ב. שטח של מלבן.

ג. שטח של משולש.

כיתה ח'

פרק קדם-דדוקטיבי

1. משפטי חפיפה

חפיפת משולשים לפי: צ.ז.צ, ז.צ.ז, צ.צ.צ (ברמה אינטואיטיבית. אלו הם משפטים שממילא הוכחותיהם הם פשוט הבנייה, ולכן אין צורך בהוכחות פורמליות).

2. משפט פיתגורס

על סמך סכום הזוויות במשולש שלמדו ביסודי וחפיפת המשולשים.

3. גופים גיאומטריים בסיסיים

א. תיבה, מנסרה, גליל.

ב. שטח פנים של שלושת הגופים האלו.

ג. נפחם.

פרק דדוקטיבי

עקרונות השיטה הדדוקטיבית:

מושגי יסוד : נקודה, ישר, מישור, מרחב.

מהו משפט, מהי הוכחה.

מהי אקסיומה. ההבדל בין מושגי יסוד, שאינם ניתנים להגדרה, לבין הנחות יסוד, שהן טענות בסיסיות שאיננו מוכיחים.

מערכת אכסיומות.

אקסיומת הישר

תוך כדי לימוד ההוכחות יילמדו המושגים הבאים:

בניות עזר (דוגמה: הוכחה לכך שסכום הזוויות במשולש הוא 180 מעלות).

הוכחה על דרך השלילה.

משפט ישר ומשפט הפוך (יש לשאול על כל משפט אם גם ההפוך לו נכון. לא תמיד ציינו זאת בתוכנית שלהלן).

<u>החלק הדדוקטיבי עד אקסיומת המקבילים יילמד בכיתה ח', מאקסיומת המקבילים ואילך בכיתה ט'.</u>

<u>רשימת נושאים ומשפטים (על פי סדר)</u>

1. משפטי חפיפת משולשים

- ארבעת המשפטים הבסיסיים (צ.ז.צ., ז. צ. ז., צ.צ.צ, צ. צ. וזווית מול הגדולה ביניהן. וכן - ז. ז. צ.)
- חוצה זווית הראש במשולש שווה שוקיים מאונך לבסיס וחוצה אותו. (יש ללמד גם את הנוסח: חוצה זווית הראש במשולש שווה שוקיים הוא גם גובה וגם תיכון)
- זוויות הבסיס במשולש שווה שוקיים שוות זו לזו.
- משפט הדלתון: האלכסון הראשי בדלתון חוצה את זווית הראש. מאונך לאלכסון המשני וחוצה אותו.

2. הוכחות לנכונות בניות היסוד

- חציית קטע, העלאת אנך, העמדת אנך אמצעי, הורדת אנך, העתקת זווית, חציית זווית.
- תיאור מילולי של בניות "על עיוור" (ללא סרטוט). דוגמאות: בנו משולש שווה צלעות על פי צלעו הנתונה; בנו משולש שווה שוקיים על פי בסיסו ושוקיו; בנו משולש ישר זווית על פי אחד הניצבים והזווית החדה שלידו;
- דוגמאות להוכחות בניסוח מילולי: הוכיחו שחוצי זוויות הבסיס במשולש שווה שוקיים שווים זה לזה; נתון שבמשולש NMK חוצה הזווית M הוא גם גובה של הצלע שמול הזווית. הוכיחו כי המשולש NMK הוא שווה שוקיים; הוכיחו כי התיכונים לשוקיים במשולש שווה שוקיים שווים זה לזה.

3. משפטים על זוויות חיצוניות ופנימיות ואי-שיוויונים במשולש

- זווית חיצונית למשולש גדולה מכל זווית פנימית שאינה צמודה לה.
- במשולש ישר זווית , שתי הזוויות האחרות הן חדות.
- זוויות הבסיס במשולש שווה שוקיים הן חדות.

- מול צלעות שוות במשולש נמצאות זוויות שוות (יש לקשר את הניסוח החדש עם זה שנלמד קודם: זוויות הבסיס במשולש שווה שוקיים שוות).
- מול זוויות שוות במשולש מונחות צלעות שוות (בניסוח אחר, שיש ללמדו: רק במשולש שווה שוקיים שתיים מהזוויות יכולות שוות זו לזו).
- מול זווית גדולה יותר (מבין שתיים) במשולש מונחת הצלע הגדולה (מבין השתיים).
- סכום שתי צלעות במשולש גדול מהצלע השלישית.
- הפרש כל שתי צלעות במשולש קטן מהצלע השלישית (ההוכחה האלגברית והגיאומטרית).

כיתה ט'

1. זוויות מתאימות, מתחלפות וחד-צדדיות בין ישרים כלליים ובין מקבילים

- הצגת מושגים: כאשר שני ישרים נחתכים על ידי ישר שלישי נוצרות: זוויות מתאימות, מתחלפות, חד צדדיות.
- כאשר שני ישרים נחתכים על ידי ישר שלישי וזוג אחד של זוויות מתאימות שוות זו לזו אז:
  - כל זוג של זוויות מתחלפות שוות זו לזו;
  - כל זוג של מתחלפות שוות זו לזו;
  - הסכום של כל זוג של זוויות חד-צדדיות שווה ל – 180^0;
- הגדרה: שני ישרים מקבילים אם הם במישור אחד ואינם נחתכים.
- משפט: כאשר שני ישרים נחתכים על ידי ישר שלישי ונוצר זוג אחד של זוויות מתאימות שוות, או זוג אחד של מתחלפות שוות, או זוג אחד של זוויות חד-צדדיות שסכומן 180^0, אז הישרים מקבילים.

2. אקסיומת המקבילים של אוקלידס

- אקסיומה: דרך נקודה מחוץ לישר עובר בדיוק מקביל אחד לישר זה.
- משפטים:

- אם שני ישרים מקבילים נחתכים על ידי ישר שלישי אז כל זוג של זוויות מתאימות שוות זו לזו, וגם כל זוג של זוויות מתחלפות שוות זו לזו, וגם סכום כל זוג של זוויות חד-צדדיות שווה ל – 180^0.
- זוג ישרים המאונכים לישר שלישי מקבילים זה לזה.
- ישר המאונך לאחד משני מקבילים מאונך גם לשני.
- שתי זוויות ששוקיהן מקבילות בהתאמה הן או שוות זו לזו או שסכומן הוא 180^0.
- סכום הזוויות במשולש.
- סכום הזוויות הפנימיות במצולע קמור.

- התיכון ליתר במשולש ישר זווית שווה למחצית היתר. המשפט ההפוך: אם צלע במשולש שווה לכפליים התיכון שלה, הזווית אשר מול אותה צלע היא ישרה.
- במשולש ישר זווית שאחת מזוויותיו היא בת 30^0 הניצב שמול אותה זווית שווה למחצית היתר. המשפט ההפוך: אם במשולש ישר זווית אחד הניצבים שווה למחצית היתר, אז הזווית מול אותו ניצב היא בת 30^0.

3. דמיון משולשים

- הגדרה ודוגמאות.
- המשפט על התנאי ההכרחי והמספיק של שוויון זוויות.

4. משפחת המרובעים

- הגדרה: מקבילית היא מרובע שכל זוג של צלעות נגדיות שלו מקבילות זו לזו.
- זוויות נגדיות במקבילית שוות זו לזו. המשפט ההפוך.
- צלעות נגדיות במקבילית שוות זו לזו. המשפט ההפוך.
- האלכסונים במקבילית חוצים זה את זה. המשפט ההפוך.
- מרובע שבו זוג אחד של צלעות נגדיות שוות ומקבילות הוא מקבילית.
- הגדרת המלבן: מקבילית ישרת זוויות.
- האלכסונים במלבן שווים זה לזה. המשפט ההפוך.
- הגדרה: מקבילית שוות צלעות היא מעוין.
- האלכסונים במעוין מאונכים זה לזה (נובע מהדלתון).
- מקבילית שאלכסוניה מאונכים זה לזה היא מעוין. (נובע מהדלתון)
- האלכסונים במעוין חוצים את זוויותיו.
- הגדרה: מקבילית שוות צלעות וישרת זוויות היא ריבוע.

לדעתנו, **כדאי שלפחות מחצית מההוכחות תנוסחנה במילים ללא סרטוטים**.

5. טרפז, קטע אמצעים בטרפז ובמשולש

- קטע אמצעים במשולש מקביל לצלע השלישית ושווה למחציתה. משפט הפוך: קטע היוצא מאמצע צלע אחת במשולש ומקביל לצלע שנייה, חוצה את הצלע השלישית. משפט הפוך שני: קטע המחבר שתי נקודות על שתיים מצלעות המשולש, המקביל לצלע השלישית ושווה לחצייה הוא קטע אמצעים.
- הגדרה: מרובע שיש לו רק זוג אחד של צלעות נגדיות מקבילות הוא טרפז.
- הגדרה: טרפז ששתי שוקיו שוות זו לזו נקרא טרפז שווה שוקיים.
- בטרפז שווה שוקיים שתי הזוויות שליד בסיס אחד שוות זו לזו.
- האלכסונים בטרפז שווה שוקיים שווים זה לזה.

- הגדרת קטע האמצעים של טרפז. המשפט שאומר שאורכו שווה לממוצע אורכי הבסיסים.

6. דמיון משולשים

- קו המקביל לאחת מצלעות משולש, חותך את שתי הצלעות האחרות, או את המשכיהן, בשתי נקודות היוצרות יחד עם קדקוד המשולש משולש הדומה למשולש הנתון.
- אם שני משולשים שווים בזווית אחת והצלעות הכולאות את הזווית פרופורציוניות, המשולשים דומים זה לזה.
- שני משולשים ששתיים מזוויות האחד שוות לשתיים מזוויות האחר. דומים זה לזה.
- שני משולשים שצלעותיהם פרופורציוניות, דומים זה לזה.
- שני משולשים ששתיים מצלעותיהם פרופורציוניות והזוויות המצויות מול הצלעות הגדולות בכל אחד מהמשולשים שוות זו לזו, דומים זה לזה.
- השטחים של משולשים דומים מתייחסים זה לזה כריבוע יחס הדמיון.

7. מקומות גיאומטריים

- הגדרה: מקום גיאומטרי של נקודות הוא אוסף כל הנקודות במישור שהן ורק הן מקיימות תנאי מסוים.
- להוכחה שאוסף נקודות Z היא מקום גיאומטרי של הנקודות המקיימות תנאי T יש שני חלקים:
  א) כל נקודה על Z מקיימת T. ב) כל נקודה המקיימת T נמצאת על Z.
- המקום הגיאומטרי של הנקודות הנמצאות במרחק קבוע n מישר נתון a הוא זוג ישרים המקבילים ל – a ובמרחק n ממנו.
- האנך האמצעי לקטע AB הוא המקום הגיאומטרי של הנקודות שמרחקיהן מקצות הקטע שווה.
- חוצה זווית הוא המקום הגיאומטרי של הנקודות שמרחקיהן משוקי הזווית שווים.
- המקום הגיאומטרי של הנקודות במישור הנמצאות במרחק שווה מנקודה כלשהי M נתונה הוא המעגל שמרכזו הוא M.

8. נקודות מיוחדות במשולש

הערה: התלמידים מכירים את הנקודות המיוחדות מכיתה ז'. בשלב זה יילמדו משפטי הפגישה של קווי הלוואי עם הוכחות.

- שלושת האנכים האמצעיים במשולש נפגשים בנקודה אחת , שהיא מרכז המעגל החוסם.
- שלושת חוצי הזוויות במשולש נפגשים בנקודה אחת שהיא מרכז המעגל החסום.
- נקודת המפגש של כל שני תיכונים מחלקת כל אחד מהם לשני קטעים כך שהקטע הקרוב לקדקוד המשולש גדול פי שניים מהקטע הרחוק מהקדקוד.
- שלושת התיכונים של המשולש נפגשים בנקודה אחת.
- שלושת הגבהים של המשולש נפגשים בנקודה אחת.

9. משפטים על המעגל

- דרך שלוש נקודות, שאינן מונחות על ישר אחד, אפשר להעביר מעגל. (בניסוח אחר: אפשר לחסום כל משולש).
- דרך שלוש נקודות שאינן על ישר אחד אפשר להעביר רק מעגל אחד.
- דרך שלוש נקודות הנמצאות על ישר אחד לא יוכל לעבור שום מעגל.
- לשתי זוויות מרכזיות שוות באותו מעגל מתאימות קשתות שוות, ולהפך.
- למיתרים שווים באותו מעגל שייכות קשתות שוות.
- לקשתות שוות באותו מעגל מתאימים מיתרים שווים.
- לזוויות מרכזיות שוות באותו מעגל שייכים מיתרים שווים.
- יש להצביע על כך שנוצרות שתי זוויות, שהגדולה מביניהן נקראת: הזווית הנישאה. מטעמי נוחיות נעזר בזווית הקטנה יותר לשם ההוכחות.
- האנך למיתר היורד ממרכז המעגל חוצה את המיתר, חוצה את הזווית המרכזית המתאימה למיתר זה וחוצה את הקשת השייכת לו.
- מיתרים שווים באותו מעגל נמצאים במרחקים שווים ממרכז המעגל.

10. זוויות היקפיות

- זווית היקפית במעגל שווה למחצית הזווית המרכזית הנשענת על אותה קשת. (3 מצבים).
- הגדרה: זווית שבה רואים קטע נתון בזווית נתונה נקראת זווית ראייה.
- המקום הגיאומטרי שממנו רואים קטע בזווית נתונה.

11. המשיק

- הגדרה: ישר שיש לו רק נקודה אחת משותפת עם המעגל נקרא משיק.
- המשיק מאונך למחוג בנקודת ההשקה.
- בניית משיק.
- הזווית הכלואה בין משיק ומיתר היוצא מנקודת ההשקה שווה לזווית ההיקפית הנשענת על הקשת של אותו מיתר.
- הזווית הכלואה בין משיק וחותך למעגל, היוצאים מנקודה שמחוץ למעגל, שווה להפרש שבין שתי הזוויות ההיקפיות הנשענות על הקשתות שביניהן.
- זווית שבין שני משיקים היוצאים מנקודה אחת למעגל נתון , שווה להפרש של שתי הזוויות ההיקפיות הנשענות על הקשתות שבין נקודות ההשקה.
- שני משיקים מנקודה חיצונית למעגל הם שווים באורכם.

הערה: הצעתנו מתייחסת לנושאים שחייבים להילמד לדעתנו בעל-יסודי. מסגרת הזמן שניתנת להוראת המתמטיקה אינה מספקת עבור תוכניתנו בגיאומטריה לכיתה ט', ויש להעביר חלק מהנושאים לחטיבה העליונה. ההתייחסות להיקף הנושאים בחטיבת הביניים צריכה להיות מתואמת עם התוכנית לחטיבה העליונה.