ליפינג מה, "לדעת וללמד מתמטיקה אלמנטרית"
פרק שלישי – חלוקת שברים

ליפינג מה הציגה בפני המורים האמריקאים והסינים את השאלה הבאה:

נניח שאתם רוצים ללמד תרגיל כמו 1/2 :¾ 1.

א. איך תסבירו את השיטה?

ב. איזה סיפור תתנו להדגמת השאלה?

למרבה ההפתעה לא כל המורים האמריקאים ידעו לחשב זאת! (הסינים ידעו כולם).

א. דרכי החישוב

המורים האמריקאים הציגו שתי שיטות: האחת, הסטנדרטית. להפוך את ה - ¾ 1 לשבר מדומה, ולבצע את החילוק על ידי כפל בהפוך (כפל ב – 2/1 במקום חלוקה ב – ½)

שיטה שנייה היא מכנה משותף: להפוך את ה – ½ ל – 2/4, ואז אפשר לחלק 7/4 ב – 2/4 בדרך זו: יש לנו 7 אובייקטים (רבעים), מחולקים ב- 2 מאותם אובייקטים.

הערה: לפני שמלמדים שיטה זו של חלוקה חייבים ללמד את המושג "חילוק להכלה", ולהדגיש את חשיבות הכינויים בחילוק הזה. על כך מאוחר יותר.

שיטה שהוצעה על ידי המורים הסיניים היא מעבר לשברים עשרוניים. כלומר, כתיבה - $1\frac{3}{4}:\frac{1}{2}=1.75:0.5$. זוהי כמובן אותה שיטה של "מכנה משותף", כאשר המכנה המשותף הוא 100, במקרה זה ($\frac{175}{100}:\frac{50}{100}$) .

המורים הסיניים השתמשו ברובם באותה שיטה – כפל בהפוך. התלמידים הסינים לומדים את הכלל: "לחלק בשבר הוא לכפול בהפוך שלו". כל המורים הסינים הכירו את הכלל, ורובם ביצעו את החילוק כך.

בבית הספר הסיני יש דגש רב על פעולות והיפוכיהן, והכלל הזה הוא חלק מן המגמה הזאת.

ב. ההסבר לדרך החישוב

1. מורה סיני אחד אמר שהתלמידים יודעים את מובן החילוק של השבר, כלומר ש - $\frac{1}{2}=1:2$, והסביר את החישוב כך:

$$1\frac{3}{4}:\frac{1}{2}=1\frac{3}{4}:(1:2)=1\frac{3}{4}:1\times 2$$

הצדקת המעבר השני אינה ברורה לי. אבל בכל מקרה כדאי לעשות שיעור דיון על: ככל שהמחלק קטן יותר התוצאה גדולה יותר. אם אנחנו מחלקים את המחלק ב – 2, המנה גדלה פי 2. אפשר לראות זאת באורח ניסיוני, אבל גם להבין זאת. ראה להלן.

2. מורה אחר אמר שהתלמידים מכירים עוד כלל: "שמירת ערך המנה".

זהו השם שהסינים משתמשים בו לכלל שאם כופלים את המחלק והמחולק באותו מספר, ערך המנה נשאר. בהמשך נזכיר אותו שוב.

ובכן, במקרה שלנו נכפול את המחלק ואת המחולק ב – 2, ונקבל:

$$1\frac{3}{4}:\frac{1}{2}=(1\frac{3}{4}\times 2):(\frac{1}{2}\times 2)=(1\frac{3}{4}\times 2):1=1\frac{3}{4}\times 2$$

3. החלוקה לחלקים (ראה שוב להלן, בקשר לסיפורי חלוקה):

מה פירוש $10:5$? זהו המספר שאך תכפול אותו ב – 5, תקבל 10. מה פירוש $1\frac{3}{4}:5$? זהו המספר שאך תכפול אותו ב – 5, תקבל $1\frac{3}{4}$. מה פירוש $1\frac{3}{4}:\frac{1}{2}$? זהו המספר שאם תכפול אותו ב – 1/2, תקבל $1\frac{3}{4}$. כלומר, זהו פי 2 מ - $1\frac{3}{4}$.

[הערה: המעניין הוא שמורים סיניים רבים הבינו וניסו להעביר לתלמידים שחלוקה ב – ½ היא כפל ב – 2, המורים האמריקאים הלכו בדרך של השיטה המכאנית.]

הערה: יש עוד שיטה שהוצעה על ידי המורים הסיניים, בלי שהצדיקו אותה. אשמח לשמוע הצדקה לה. הם אמרו ש:

$$\frac{7}{4}:\frac{1}{2}=\frac{7:1}{4:2}$$

מה שאומרים כאן הוא שהמכנה של המחלק צריך לחלק את המכנה של המחולק. מדוע? או, יותר נכון – איך אפשר להסביר זאת לתלמידים?

ג. סיפור חשבוני

המורים התבקשו להמציא סיפור חשבוני המתאים לתרגיל $1\frac{3}{4}:\frac{1}{2}$.
כאן היו התוצאות אצל האמריקאים קטסטרופליות ממש: רק מורה אחת מבין 23 הצליחה במשימה (היא השתמשה בחילוק להכלה:

יש לי $1\frac{3}{4}$ קרקרים, וכל ילד מקבל ½ קרקר. כמה ילדים יוכלו לקבל? על כך שהתוצאה היא $3\frac{1}{2}$ ילדים התגברה בצורה יפה: 3 ילדים יקבלו ½ קרקר, וילד אחד יקבל רק ½ מ – ½, כלומר ¼ קרקר).

כל שאר המורים סיפרו סיפורים לא נכונים (בעיקר סיפורים שהתאימו לכפל ב – ½, במקום לחלוקה). חלקם הבחינו בכך שהתוצאה אינה מתאימה למה שעשו קודם, אבל לא הצליחו ליישב בין הדברים, משום שהבנתם את האלגוריתם הייתה שטחית.

אצל הסינים המצב היה לאין שיעור יותר טוב: 65 מתוך 72 המרואיינים נתנו סיפור נכון, 12 מתוכם יותר מסיפור אחד. 6 מורים לא הצליחו לתת סיפור כלשהו, ורק מורה סיני אחד נתן סיפור שאינו מתאים.

התובנה שהמורים הסיניים גילו הייתה ברמה אחרת לגמרי מזו של האמריקאים. פלנטה אחרת, ממש. ברור לגמרי שהם רגילים לספר סיפורים חשבוניים; שהם רגילים לערוך דיון בכיתה על סיפורים כאלו; שהם מכירים יותר ממובן אחד לכל אחד מן המושגים הנדונים (כפל שלמים, חילוק שלמים, מהות השבר, כפל שברים, חילוק שברים).

1. מודל החלוקה להכלה

16 מורים נתנו סיפור שבו לחילוק יש מובן של חלוקה להכלה (quotitive model), (שם אחר - מודל המידה), שבו $10:2=5$ משום ש – 2 נכנס 5 פעמים ב - 10: כמה פעמים נכנס ½ ב - $1\frac{3}{4}$. שלא כמו בסיפור האמריקאי ששמענו, אלו שסיפרו זאת כך לא הסתבכו בדרישה שהתוצאה תהיה שלמה (מה שקרה כשהשאלה הייתה "כמה ילדים"). למשל:

קבוצת פועלים סוללת ½ ק"מ כביש כל יום. כמה ימים ייקח לה לסלול $1\frac{3}{4}$ ק"מ?

אם מנה היא ½ תפוח, לכמה מנות יספיקו $1\frac{3}{4}$ תפוחים?

אוסיף כאן סיפור שיסביר את השם "מודל המידה":

ליוסי יש חבל באורך ½ מטר, והוא רוצה למדוד בעזרתו את הצל של אביו, שאורכו $1\frac{3}{4}$ מטר. כמה פעמים ייכנס החבל בתוך הצל?

2. תפיסת החילוק כחלוקה לחלקים

הרוב המכריע של המורים הסינים השתמשו במודל החלוקה השני, זה של חילוק לחלקים. במודל הזה $10:2=5$ משום שכאשר מחלקים 10 תפוחים ל – 2 חלקים שווים כל חלק הוא בגודל 5.

מדוע דווקא המודל הזה? לא ברור. זהו המודל הרגיל יותר של חלוקה, אבל כאשר מדובר בשברים הוא קשה יותר לתפיסה. ההבנה כאן אינה ישירה: היא דרך הכפל, כלומר ראיית החילוק כפעולה הפוכה לכפל. $10:2=5$ משום ש – $5x2=10$. לכן $1\frac{3}{4}:\frac{1}{2}$ הוא אותו מספר שכפול ½ ייתן $1\frac{3}{4}$. כלומר מספר שחציו הוא $1\frac{3}{4}$, כלומר פעמיים $1\frac{3}{4}$.

מדוע המורים הסיניים מקשרים את הדרך הזאת דווקא למובן החלוקה לחלקים?

בעיני זוהי תובנה מפתיעה, שמראה עד כמה היטב יושבים אצלם הדברים. כאשר מסתכלים ב - $10:2=5$ כחלוקה לחלקים, 2 סופר את מספר הפעמים. נאמר, 2 פעמים 5 תפוחים הם 10 תפוחים. חילקנו ל – 2 ילדים, כל אחד קיבל 5 תפוחים, אם כן 2 פעמים 5 תפוחים הם 10 תפוחים.

גם כאשר שואלים "1/2 ממה הוא $1\frac{3}{4}$?" ה – ½ סופר את מספר הפעמים (½ פעמים $3\frac{1}{2}$ הוא $1\frac{3}{4}$).

המורים המערביים בקושי מכירים אפילו את המושגים, שלא לדבר על קישור כזה בין סוג הסיפור ובין המונח הנכון! צריך להתרגל זמן רב למושגים הללו בכדי שהדברים יהיו כה ברורים כפי שהם ברורים להם.

הנה כמה סיפורים מסוג זה:

חצי מאורך חבל קפיצה אורכו $1\frac{3}{4}$ מטרים. מה אורך חבל הקפיצה?
(בעלת הדוגמא מוסיפה, במלים מעט שונות, הסבר כזה: כפי שאם יודעים שפעמיים מספר לא ידוע הוא $1\frac{3}{4}$ מחלקים $1\frac{3}{4}$ ב – 2 בכדי לקבל את המספר, כך אם יודעים ש – ½ ממספר הוא $1\frac{3}{4}$, מחלקים ב – ½ בכדי לדעת את המספר. אם כן המספר שלנו הוא אותו מספר ש – ½ ממנו הוא $1\frac{3}{4}$.}

(אותה מורה מוסיפה שלא הייתה משתמשת ב - $1\frac{3}{4}:\frac{1}{2}$ להדגמת חלוקה בשבר: היא טוענת שכאן רואים מיד את התוצאה!)

"לחלק בשבר הוא למצוא מספר כאשר שבר ממנו הוא מספר ידוע", אומרת מורה אחרת, ונותנת את הדוגמא הבאה – מטר מעוקב של עץ שוקל $1\frac{3}{4}$ טון, וידוע שזה ½ ממשקלו של מטר מעוקב שיש. מה משקלו של מטר מעוקב שיש?

½ חבילת ממתקים משקלה $1\frac{3}{4}$ ק"ג. מה משקל החבילה כולה?

ליפינג מה אפילו מרחיקה לכת, ומשערת שהסיבה שהמורים הסיניים הרבו לתת את המודל הזה (חלוקה לחלקים) היא דידאקטית. הם רצו להבחין בין חלוקה בשברים וחלוקה במספרים שלמים. ובמקרה של חלוקה לחלקים המובן באמת שונה לשברים ולמספרים שלמים: יש הבדל מהותי בין "2 פעמים מספר" לבין "1/2 פעמים המספר". נראה לי שההסבר הזה הוא קצת מחמיא מדי אפילו למורים הסיניים, אבל מי יודע. התובנה שגילו היא באמת עמוקה.

3. תפיסת הכפל כפעולה סימטרית, והחילוק כהפך מן הכפל

כאשר, למשל, מחשבים שטח של מלבן, הכפל הוא פעולה סימטרית. כאשר אומרים ששטח של מלבן שרוחבו 2 מטרים ואורכו 3 מטרים הוא 6 מ"ר, תפקידם של ה – 2 וה – 3 הוא סימטרי. היו מורים סיניים שראו כך את הכפל, ובהתאם את החילוק. למשל:

גובהו של מלבן הוא ½ מטר, ושטחו $1\frac{3}{4}$ מ"ר. מהו רוחבו?

באופן כללי, המורים הסיניים נתנו דוגמאות יותר מופשטות, לאו דווקא מנות בדידות של מזון, כפי שעשו רוב האמריקאים (קרקרים, פיצות). כאשר עובדים בשברים, יש לזה יתרון. התשובה אינה חייבת להיות שלמה.

ד. חבילת הידע המקדים, והגורם החשוב ביותר בו: המשמעות של כפל בשברים.

כאשר נשאלו המורים מהם מרכיבי חבילת הידע הדרושים לפני לימוד חלוקה בשבר, הם מנו:

1. המשמעות של כפל בשלמים
2. חלוקה כהיפוך של כפל
3. סוגי החילוק השונים
4. המשמעות של כפל בשברים
5. מושג השבר
6. מושג היחידה

מבין אלה ציינו המורים הסיניים במיוחד את 4: הם טענו שחשובה במיוחד תפיסת הכפל בשבר כלקיחת חלק מן השלם. הם הרגישו שהמושג החשוב לביצוע תרגיל מסוג זה שהוצג כאן אינו דווקא חלוקה בשבר, אלא כפל בשבר. טענתה של ליפינג מה היא שהקישור למושגים אחרים הוא הגורם העיקרי החסר למורים האמריקאים.

הערה על השיעור למורים שניתן:
אחת המורות סיפרה שהיא מלמדת את החילוק בשברים דרך כפל המחלק והמחולק באותו מספר, וכך היא מצדיקה את הכפל בהופכי. היא סיפרה שהיא הולכת בשלבים, לאט לאט, ורק כאשר החוק "כפל המחלק והמחולק באותו מספר אינו משנה את המנה" יושב היטב אצל הילדים היא משתמשת בו לחלוקת שברים.

שאר המורות סיפרו שהן עושות חלוקה להכלה. חלקן אמרו שהן משתמשות בשם הזה, ושהן מלמדות את הילדים את ההבדל בין שני סוגי החלוקה.

כל הסיפורים שנתנו המורות היו בדרך החלוקה להכלה.

[עד כאן תרגום פרק מספרה של ליפינג מה. מכאן הצעות שלי – ר.א.]

נושאים לדיון בשברים

איך ללמד שברים?

התשובה היא: על ידי דיון, דיון ועוד דיון. שברים הוא נושא עשיר מאוד, מתחבר עם כפל, חלוקה, סוגי חילוק, וכפי שנראה גם עם עוד נושאים (פריטה והמרה, למשל). לשבר יש מובנים רבים (חלוקה, מספר החלקים, יחס) וצריך לעמוד על כולם.

א. **נושאים מקדימים**

לשבר יש מספר מובנים. ראשית, הוא מנה של שני מספרים. שנית, הוא בעל מבנה "מונה-מכנה", כלומר הוא סופר כמה חלקי – n (כאשר n הוא המכנה) יש לנו. הוא יחס, פי כמה גדול מספר אחד מחברו. ולבסוף, אפשר לראות בו גם מספר, כלומר מייצג גודל או כמות.

בכדי להבין שברים צריך לראות אותם מכל הכיוונים.

הנה, למשל:

דרך אפשרית להציג שברים בפעם הראשונה:

<u>שאלה לדיון בכיתה</u>: מדוע לחילוק קוראים "חילוק"? (בהנחה שהנושא עדיין לא נדון). התשובה שהתלמידים אמורים להגיע אליה – מחלקים למספר חלקים. למשל, אם יש לנו 6 קוביות שוקולד, ומחלקים בין 3 אחים, כל ילד מקבל חלק מן הקוביות.

<u>שאלה לדיון</u>: האם פגשתם אי פעם מצב שבו צריך לחלק בין מספר חברים, או אחים, לא מספר דברים, אלא רק דבר אחד?

יש לשער שהתלמידים יבואו עם הרבה דוגמאות שאינן צפויות. אבל בואו נניח שהדוגמא שהם נותנים היא מן הסוג של תפוח, או פיצה.

מה עושים אז? אנחנו צריכים לחלק בעצמנו את התפוח, או הפיצה, עם סכין, לחלקים שווים. עכשיו יש לנו הרבה דברים (חלקים), ואפשר לחלק, כמו במקרה הקודם!

לחלקים הללו קוראים "שברים".

מי יודע איך קוראים לחלק כאשר מחלקים ל – 2 חלקים?

אחר כך, כאשר מלמדים צמצום והרחבה, אפשר לפתח את הסיפור הזה: נניח שלאמא יש 3 ילדים, אבל היא מחליטה לחלק לא ל – 3 חלקים אלא ל – 30, האם עדיין אפשר לחלק בין השלושה? בוודאי.

נושאים לדיון:

ככל שהמחלק גדול יותר המנה קטנה יותר
הקשר בין צמצום והרחבה לבין הפעולה המקבילה בחיבור וחיסור
הקשר בין צמצום והרחבה לבין פריטה והמרה, ובין הפיכת מספר מעורב לשבר מדומה.

חשוב שחצי פעמים זה לחלק ל – 2, לא ב – 1/2

כלל: **כאשר מגדילים את המחלק פי 2, המנה קטנה פי 2. כאשר מקטינים את המחלק פי 2, המנה גדלה פי 2.**

איך לראות זאת?

אני ממליץ על השיטה הבאה:

בכיתה א' סיפרתי לילדים על משפחה, עם אבא, אמא ושני ילדים. צעד של הילד הקטן אורכו אריח אחד. צעד של הילד הגדול יותר הוא בן 2 אריחים. האמא צועדת 3 אריחים, והאבא בקפיצות של 4. אני עובד אתם על סדרות בעזרת זה. אבל זהו גם מבוא לחילוק: כמה צעדים צריך האבא ללכת בכדי לעבור 20 אריחים? בכדי לעבור 60 אריחים?

עכשיו אפשר לשים לב לכך שצעד של האבא גדול פי 4 מזה של הילד הקטן, לכן הוא צריך רק ¼ ממספר הצעדים, ו – ½ ממספר הצעדים של הילד הגדול יותר.

(זהו מקום לספר את הבדיחה על האבא המתלונן לילד שהוא מכלה כל כך הרבה זוגות נעליים. "כן", אומר הילד, "אבל על כל צעד שלך אני עושה שניים".)

עכשיו ממציאים ענק. צעד שלו הוא 12 מרצפות. לאבא ייקח 15 צעדים לעבור 60 מרצפות. כמה ייקח לענק?

זה יכול להיות מבוא לחילוק בשברים. נאמר שנולד תינוק במשפחה. בכל צעד זחילה שלו הוא מתקדם ½ מרצפת. כמה צעדים יצטרך לעשות בכדי לעבור 10 מרצפות?