

סיכום ספרה של ליפינג מה, "לדעת וללמד מתמטיקה אלמנטרית"

ב – 1999 הופיע בארצות הברית ספר שערור הדים רבים, מאת המחברת ילידת סין ליפינג מה. הספר נקרא "לדעת וללמד מתמטיקה אלמנטרית" (Knowing and teaching elementary mathematics), והוא משווה בין הדרכים בהן מלמדים מתמטיקה בכיתות הנמוכות בארצות הברית ובסין.

ליפינג מה הפכה למורה בשנות המהפכה התרבותית. היא הייתה בשנות העשרה שלה, ונשלחה ל-"חינוך מחדש" בידי האיכרים בכפר נידח. ראש הכפר ביקש ממנה שתלמד את ילדי כיתות אלף ובית (בכיתה אחת, יחד), וכך, ללא כל הכשרה, הפכה למורה. להפתעתה, גילתה שיש לה כשרון לכך. אחר כך, כשחזרה לעיר הולדתה שנגחאי, למדה חינוך, ונסעה ב – 1988 לארצות הברית להמשך לימודיה. בסופו של דבר השתקעה שם, וכתבה את הדוקטורט שלה בסטנפורד. הספר הוא עיבוד של עבודת הדוקטורט.

נקודת המוצא של הספר הוא עובדה פרדוקסלית. תלמידים סיניים מצליחים במבחנים בינלאומיים במתמטיקה יותר מחבריהם האמריקנים, הן ברמת בית הספר היסודי והן ברמת התיכון. זאת, כאשר רמת ההשכלה של המורים הסיניים נחותה בהרבה מזו של מורה אמריקני ממוצע. מורה סיני הוא בדרך כלל בעל השכלה פורמלית של 11 עד 12 שנים: 9 שנות לימוד בבית הספר היסודי, ועוד שנתיים בסמינר. למורה אמריקני טיפוסי השכלה בת 14 עד 16 שנים, לפעמים יותר. התנאים הפיזיים והעזרים המצויים לרשות המורה בוודאי אינם טובים יותר בסין, ומספר הילדים בכיתה הוא בוודאי לא קטן יותר. כיצד זה שבכל זאת מצליחים המורים הסיניים להעביר את החומר בצורה טובה יותר?

תשובתה של ליפינג מה היא מפתיעה וחשובה: המורים הסיניים יודעים מתמטיקה היטב יותר. לא מתמטיקה גבוהה, אבל המתמטיקה הרלבנטית למה שהם מלמדים. הם מבינים את המושגים בצורה עמוקה יותר, ולכן מצליחים להעביר אותם היטב יותר לתלמידים. הם מכירים את הדקויות והקשיים בחומר האלמנטרי היטב יותר, ולכן מסבירים אותו היטב יותר.

לכך יש שני לקחים חשובים ומפתיעים. האחד, שמתמטיקה גבוהה אינה רלבנטית באמת. מורה שיודע את תורת החבורות לא בהכרח יבין היטב יותר כפל שברים. הלקח השני הוא שיש מה לדעת במתמטיקה אלמנטרית. יש רמות שונות של עומק הבנה. גם מרצה באוניברסיטה יכול ללמוד משהו על מתמטיקה של בית הספר היסודי. אמנם, הוא יודע אותה, אבל אם ההוראה שהוא עצמו קיבל לא הייתה טובה, ייתכן שמעולם לא ניסח לעצמו את הדברים במפורש.

מניין ההבנה הטובה יותר של המורים הסיניים? הסבר אחד הוא מסורת השימוש בחשבונייה (אבקוס). החשבונייה בנויה על השיטה העשרונית, והיא שזורה כה היטב בחייהם של הסינים, שהשפה הסינית בנתה מילים מיוחדות לה. למשל, "הרכבת יחידה גדולה יותר" (צירוף אחדות לעשרת ועשרות למאות). אבל ביסודו של דבר נדמה פשוט שהאמריקאים מכניים יותר. האם יש לייחס זאת לתכליתיות האמריקאית, הרואה ביכולת הביצוע את המטרה, ולכן שמה דגש על האלגוריתמים ולא על ההבנה? או אולי נרחיק אפילו לכת ונסיק שהוראת מתמטיקה גבוהה יותר

היא אפילו מזיקה, בכך שהיא פוגעת בכבוד למורכבות של המתמטיקה האלמנטרית?

נושאו האמיתי של ספרה של ליפינג מה אינו סתם השוואה, אלא התכנים המתמטיים שאפשר ללמוד ממנה. במלים אחרות, זהו מקור מעולה ללימוד פדגוגיה מתמטית. ליפינג מה לוקחת מספר נושאים מתמטיים, כמו חיסור אנכי וחלוקת שברים, ודנה בפרוטרוט בגישות השונות של המורים הסיניים והאמריקאים להוראתם. מכך אפשר ללמוד הרבה מאוד, הן בנושא הספציפי והן על העקרונות הכלליים.

בהשתלמות נעבור על ספרה של מה פרק פרק.

פרק ראשון: חיסור אנכי

קחו תרגיל חיסור כמו:

$$\begin{array}{r} 53 \\ - \\ 26 \\ \hline \end{array}$$

בהשתלמות אבקש מן המורות לענות בכתב על השאלות הבאות:

1. אילו שלבים מקדימים נחוצים לפני שמגיעים לשאלה כזו?
2. מהם המושגים העיקריים הקשורים להוראת התרגיל הזה?
3. אילו נושאים אחרים קשורים אליו?
4. אילו אמצעי המחשה אתן חושבות שעשויים להועיל?

אחרי שיכתבו את התשובות לעצמן, נערוך דיון, ואחר כך אבקש אותן לתאר כיצד ייגשו להוראת חיסור מסוג זה.

ההבדל בין הגישות של מורים אמריקאיים וסינים

א. "הלוואה" מול "ארגון מחדש"

ההבדל הראשון הוא שמרבית המורים האמריקאים השתמשו במונח "ללוות". ה – 3 "לווה" עשרת אחת מן ה – 5. הסינים השתמשו רובם במונח של "איסוף מחדש" (regrouping), כלומר איסוף המספר 53 בצורה אחרת מאשר 3 יחידות ו – 5 עשרות.

מושג ה-"הלוואה" הוא בעייתי. לתלמיד יש תמונה בראשו של אמו ההולכת ללוות כוס חלב מן השכנים, מה שאין לו מקביל אמיתי בתוכן המתמטי. הרי ה – 3 לא

יחזיר את ה – 10 שלקח. דימויים ספרותיים מבלבלים בדרך כלל יותר משהם עוזרים. מורה סינית אחת טענה שהתלמידים יחושו מבלבלים: הרי כאשר מלווים המלווה צריך להסכים להלוואה. מה יקרה אם ה – 5 לא יסכים להלוות ל – 3?

ה-"איסוף מחדש", לעומת זאת, מזכיר לתלמיד מחדש את הרעיון של השיטה העשרונית, הרעיון שהוא בבסיס אלגוריתם החיסור: ה – 53 מאורגן בצורה הרגילה. אספנו 5 עשרות. בכדי לחסר ממנו מספר עם ספרת אחדות גדולה יותר מ – 3, אנחנו צריכים לסדר אותו מחדש: לפרק אחת העשרות ליחידות, וכך לקבל 4 עשרות ועוד 13 יחידות.

אחת הסיבות לכך שהסינים רואים זאת כך היא שהשפה שלהם מדברת כך: יש בה מושג ("tui yi") "פירוק יחידה בעלת ערך גבוה יותר" (כלומר, פירוק עשרות ליחידות, או מאות לעשרות, או מאות ליחידות).

מחוץ לדימוי המבלבל, במינוח של ה-"הלוואה" יש הטעייה נוספת: הוא מתייחס לשתי הספרות כאילו היו ישויות נפרדות, ולא שני מרכיבים של אותו מספר. ה-"איסוף מחדש", לעומת זאת, מבהיר שהתרגיל שלנו אינו מורכב משני תרגילים נפרדים, 3-6 ו – 20-50, אלא חיסור של שני מספרים. אחת המורות, דווקא אמריקאית, הציגה זאת לתלמידיה כך: "מה אתם חושבים, האם אפשר לחסר את שני המספרים? האם אפשר לחסר ממספר שהוא חמישים ועוד משהו מספר שהוא עשרים ועוד משהו? בוודאי. אם כך, היכן הבעיה? מדוע כאשר אנחנו עושים 3-6 יש לנו בעיה? לאן נעלמו כל ה – 1 – 1 – ים ב – 53? הם נעלמו לתוך החמישים. אז טוב, בואו ניקח מתוך ה – 50 חלק מן ה – 1 – 1 – ים שנתנו לו".

מורה סיני אחד טען שהתלמידים עצמם יגלו את עניין ה – "לאן נעלמו ה – 1 – ים". הוא ישאל אותם – הרי 53 גדול מ – 26. איך זה שאי אפשר לחסר? הם יגלו בעצמם שהיו מספיק 1 – ים, אלא שקיבצנו אותם לעשרות.

מושג ה-"פירוק של יחידה גבוהה יותר" גם הולך רחוק יותר. למשל, כאשר מנסים לחשב 18 – 104, לא מספיק לפרק עשרת אחת ליחידות. צריך לפרק מאה לעשרות, ואחר כך עשרת אחת ליחידות: $104 = 90 + 10 + 4 = 90 + 14$, ואז מן ה – 90 אפשר לחסר את ה – 10 מתוך ה – 18, ומן ה – 14 את ה – 8.

ב. לשים את הדברים בהקשר

הבדל נוסף בין המורים הסיניים והאמריקאיים היה שיותר מורים סיניים לימדו הקשרים של המושג שבו מדובר (במקרה זה, פירוק עשרת ליחידות). הנה, למשל, דבריה של מורה סינית:

אני אתחיל מתרגיל שבו אין בעיה, כמו 22-43. אחרי שהם יפתרו זאת, אתן להם תרגיל כמו 27-43. הם יגלו את הבעיה שאין ב – 43 מספיק יחידות בכדי לחסר מהן 7. אז אגיד להם: טוב, היום אין לנו מספיק יחידות. אבל לפעמים יש לנו יותר מדי

יחידות. זוכרים את השבוע שעבר כאשר עשינו חיבור עם העברה [כאשר החיבור חוצה את העשרת]? מה עשינו אז עם עודף היחידות? הם יאמרו שקיבצנו אותן לעשרות. למשל, כאשר חישבנו $18+25$, בתחילה חישבנו $8+5$, וראינו שאפשר לקבץ מהם עשרת, כלומר לכתוב זאת כ- $10+3$. עכשיו, כאשר חסרות לנו יחידות, אנחנו יכולים לפרק עשרות חזרה ליחידות. נפרק עשרת אחת מתוך ה- 40 , ואז יהיו לנו מספיק יחידות.

התלמידים מוצאים כאן קשר למה שלמדו קודם, ורואים שזה אותו דבר, רק מזווית אחרת.

כאשר הסינים מדברים על יחס המרה בין יחידות אפשר לקשר זאת למושגים אחרים – למשל, המרה בין מטרים וסנטימטרים, בין אגורות ושקלים. התלמידים ימצאו שהם כבר מכירים פעולות כאלה של המרה. למשל, כשהם רוצים לתת עודף משקל.

ג. שלבי הוראת המושג

מורים סינים היו יותר לשלבים שלהם נחוץ לפרק את הוראת המושג החדש [לדעתי, זהו גורם מכריע. פירוק הוראתו של מושג לשלבים הוא בעיני אחד הסודות הגדולים של ההוראה]. בין מורים רבים הייתה הסכמה שהשלבים בהוראת החיסור האנכי הם:

- א. חיסור עד 20 , כשהכוונה לחיסור מן הצורה $13-7$, כלומר שבו ספרת היחידות של המחסר גדולה מספרת היחידות של המחוסר.
- ב. חיסור עד 100
- ג. האלגוריתם הכללי.

בשלב א' אין באמת "העברת עשרת" (פירוק של העשרות, כפי שהחמישים ב- 53 מתפרק ל- $40+10$ בתרגיל $53-26$) יש להתייחס על המספר כאילו לא היה מורכב כלל מאחדות ועשרות: 13 נתפס כ- 13 יחידות, לא כ- $10+3$. זה חשוב לאמור: ראיתי כיצד ילדה מתבלבלת, ואומרת שכאשר מעבירים 10 ל- 3 נשאר כמו קודם, 13

[הערה: למעשה נחוץ כאן עוד שלב מקדים: חיסור מ- 10 , או פירוק העשרת. כלומר, שליטה ב- $10-1$, $10-2$ וכו'. מי שיודע זאת לא יתקשה ב- $13-7$. מי שיודע $10-7$ יוכל דווקא להיעזר בפירוק של 13 ל- $10+3$, ובכך ש- $10-7=3$]

על כל פנים – ברור שזהו הבסיס. כל האלגוריתם מתבסס על ידיעת חיסור מסוג זה.

בחיסור עד 100 מופיע פירוק אחד – של עשרת אחת.

האלגוריתם הכללי דורש לפעמים יותר מפירוק אחד. למשל, כאשר מחשבים $123-58$ צריך לפרק הן עשרת אחת והן את המאה.

הייתי מוסיף כאן שלב חשוב: עשרות שלמות פחות מספר חד ספרתי. למשל 7-40, 3-50. החשיבות של זה תוסבר בהמשך. מי שיודע פירוק העשרת יעשה זאת בקלות.

מורים סינניים אחרים אמרו שהמדובר אינו בסדרה של מושגים, אלא בחבילה שלמה של ידע. ליפינג מה אספה את הנושאים הבאים הקשורים לחיסור אנכי:

פירוק העשרת
חיבור וחיסור כפעולות הפוכות
חיסור בלי צירוף מחדש (23-46)
חיסור עד 20
חיבור עם העברה
המרה ופריטה
יחס המרה בין יחידות

ד. איסוף מחדש בדרכים שונות

איך אנחנו עושים חיסור בראש? כדאי לשאול זאת את התלמידים. איך הם מחסרים 23 מ-46? קרוב לודאי שהם עושים תחילה 20-40, ורק אחר כך 3-6. זה טבעי יותר, משום שספרת העשרות היא המשמעותית יותר.

עכשיו שאלו אותם איך הם עושים בראש 28-42. הם מחסרים תחילה את ה-20, ומקבלים 22. רק עכשיו הם מחסרים את ה-8. זאת אפשר לעשות ביותר מדרך אחת. למשל, לחסר 2, לקבל 20, ואחר כך לחסר את 6 הנותרים. כפי שאמרנו לעיל, 20-6 הוא סוג תרגיל שכדאי לעשות אותו ישר אחרי פירוק העשרת.

מה בעצם אנחנו עושים כאן? עושים איסוף מחדש של המחוסר. כלומר, כותבים את ה-28 בדרך אחרת: $28=20+2+6$, ואז קל לחסר! קל אפילו יותר מאשר בשיטה הרגילה!

מורה סיננית תיארה כיצד היא ערכה דיון, לאורך כל השנה (המדובר הוא בכיתה ב'!) ביתרונות וחסרונות השיטה הזאת. היא שאלה אותם מה יקרה אם נעשה זאת בכתב. בשלב הראשון נקבל $42-20=22$. מה יקרה אם ננסה לכתוב זאת? בודאי ננסה לכתוב את ספרת העשרות, שאותה בעצם קבענו. כלומר, 2. אבל אחר כך נצטרך לחזור בנו, ולשנות את ספרת העשרות ל-1! התלמידים השתכנעו שכאשר עושים תרגילים ארוכים יותר, ונחוץ להשתמש בכתיבה במקום בזיכרון, השיטה הרגילה טובה יותר.

אבל מה שגילינו כאן הוא שיש יותר מדרך אחת לאיסוף מחדש. ודיון בכך עשוי להוסיף.

הערה: בכיתה א' ערכנו דיון בשאלה מדוע $15-12=3$ (ליתר דיוק, המורה שאלה את התלמידים איך עשו זאת). קיבלנו תשובות מתשובות שונות. תלמיד אחד אמר של – 15 יש 10 יותר מאשר ל – 5, ול – 12 יש 10 יותר מאשר ל – 2, והם מתבטלים. אבל שימו לב – זהו בדיוק מה שעושים בצמצום והרחבה! אם מתייחסים לשבר כאל חילוק, הרי הרחבה היא לכפול ולחלק באותו דבר. אם כן, כדאי ללמד את התלמידים את הדבר הזה היטב. אולי אפילו לנסח להם: אם מוסיפים למחסר ולמחוסר אותו מספר התוצאה לא משתנה. בכיתה א' לעשות זאת בדוגמאות, בכיתה ב' כבר אפשר לנסח. ואז, כאשר יגיעו לצמצום ולהרחבה, תהיה להם כבר תבנית מוכנה בראשם.

סיכום: מה שליפינג מה מראה לנו כאן הוא שאפילו בנושא כה פשוט כמו חיסור אנכי יש צורך בידיעה, יש מקום ויש יתרון להבנה עמוקה של המורה. יש גם מקום לדיון ולהחלפת ידע בין מורים, אפילו בנושאים פשוטים מעין זה.