

כינוי=נכפל=מחולק=שלם

מאת
פרופ' רון אהרוני*

אחד הדברים המסתוריים ביותר לתלמידי בית הספר היסודי (וגם עבור המורים) הוא ש- $\frac{1}{3}$ מגודל הוא $\frac{1}{3}$ כפול הגודל. $\frac{1}{3}$ מ-24 תפוחים הוא $\frac{1}{3} \times 24$ תפוחים. אסתכן ואומר שאפילו מתמטיקאים מקצועיים יגמגמו מעט אם יתבקשו להסביר זאת.

הסוד מאחורי העובדה הזאת נעוץ בעיקרון שהצבעה מפורשת עליו עשויה לתרום רבות להוראת השברים, וכן להוראת הכפל והחילוק: **שהכינוי במנייה, הנכפל בפעולת הכפל, המחולק בפעולת החילוק והשלם בשבר חד הם.** לכולם יש אותו תפקיד. כולם הם יחידה שעליה חוזרים, מספר שלם או שבור של פעמים.

במנייה חשוב מה מונים. 4 כלבים ו-4 חתולים אינם אותו דבר. בכפל חשוב מה כופלים – 4 פעמים 3, או 4 פעמים תפוח. בחילוק חשוב מה מחלקים. ובשברים חשוב ממה לוקחים את השבר: חצי תפוח אינו חצי תפוז, ומחצית של משחק כדורגל ארוכה יותר ממחצית של משחק כדורסל (שלא לדבר על כך שחצי תפוח אינו מחצית משחק כדורגל...). בכל אלה חשוב מה מונים.

כפל ומנייה הם למעשה כמעט אותו דבר. במנייה מזהים סוג של עצם בעולם, וחוזרים עליו כמה פעמים. לשמו של העצם שעליו חוזרים קוראים "כינוי". גם בכפל חוזרים על אותה יחידה כמה פעמים. משום כך 3 פעמים תפוח ו-3 כפול תפוח הם אותו דבר. בכפל נקראת היחידה שעליה חוזרים "נכפל". הנכפל יכול להיות מספר, כמו "3 פעמים 4", או סוג של עצם, כמו "3 פעמים תפוח". כדי ללמד זאת נחוץ, כמובן, להבחין בין כופל (שאומר כמה פעמים חוזרים על אותה יחידה) ובין הנכפל (שהוא הדבר שעליו חוזרים). חוסר הדגש על ההבדל בין כופל ונכפל, האופייני כל כך לחינוך המתמטי שלנו, הוא המקביל להיעדר דגש מספיק על כינויים במנייה.

כפי שאפשר לחזור על אותה יחידה כמה פעמים, כך אפשר לקחת יחידה ובמקום לכפול אותה לחלק אותה למספר חלקים. היחידה הזאת נקראת "מחולק". ב-12 לחלק ל-3 המספר 12 הוא המחולק, כי אותו מחלקים. כאשר מחלקים עיגול ל-3 חלקים שווים, המחולק הוא העיגול.

אם כן, "כינוי", "נכפל" ו"מחולק" הם בעצם אותו דבר, רק הראשון הוא במנייה, השני בכפל, והשלישי בחילוק. ובדיוק כפי שבכפל אפשר לכפול לא רק מספר, אלא גם תפוחים, כך גם בחילוק: כאשר מחלקים תפוח ל-3 חלקים שווים המחולק הוא התפוח.

עובדה מצערת היא שבהוראת הכפל והחילוק כופלים ומחלקים רק מספרים. הדבר מסתיר את טבען של הפעולות האלה. כאשר לומדים כפל, כדאי גם ללמוד מהו "3 כפול עיפרון", כדי להבהיר לילד שכפל ב-3 הוא חזרה 3 פעמים על אותו דבר. כאשר לומדים חילוק, כדאי לתת לילדים לחלק, כבר מתחילה, 12 ל-3 חלקים שווים, ובאותה עת גם עיגול ל-3 חלקים שווים, או מלבן, או שני מלבנים.

לכינוי במנייה, הנכפל בכפל והמחולק בחילוק יש מקביל בשברים: זהו ה"שלם". $\frac{2}{3}$ מיחידה מתקבל מחילוק היחידה ל-3, וכפל תוצאת החילוק ב-2. היחידה הזאת נקראת ה"שלם". היא יכולה להיות עצם, כמו תפוח, או קבוצה של תפוחים, כמו 12 תפוחים (שהוא כאמור "12 כפול תפוח"), או מספר טהור, כמו 12.

אופרטור ואופרנד

ניסוח אחר לאותו עיקרון הוא שהכינוי, הנכפל, המחולק והשלם הם **אופרנד**, כלומר דבר מה שעליו פועלים. ב-"2 פעמים 3" הוא **אופרטור**, כלומר פועל על ה-3, ו-3 הוא אופרנד. ב- $12 \times \frac{2}{3}$ השבר $\frac{2}{3}$ הוא אופרטור שפועל על האופרנד 12.

בואו נחזור עתה לשאלה שבה פתחנו: מדוע $\frac{1}{3}$ מ-24 תפוחים הוא אותו דבר כמו $\frac{1}{3} \times 24$ תפוחים? בדיוק מן הסיבה ש"3 (מ)תפוח" הוא "3 כפול תפוח". ה- $\frac{1}{3}$ אומר איזה חלק, או כמות, מן השלם לוקחים, וכפי ש-3 פעמים השלם הוא "3 כפול השלם" כך גם $\frac{1}{3}$ פעמים השלם הוא " $\frac{1}{3}$ פעמים השלם".

יחידות

סוג מיוחד של כינוי (או נכפל) הוא **יחידות**: קילוגרם, גרם, דקות, שניות, מטר, קילומטר, מטר מעוקב, דצימטר מעוקב, מעלות צלזיוס. בשלב מתקדם יותר לומדים גם יחידות שהן יחסים – קילומטר לשעה (יחידה של מהירות), קילוגרם לדצימטר מעוקב (או גרם לסנטימטר מעוקב, יחידות המשקל הסגולי). בשלבים מתקדמים עוד יותר לומדים יחידות פיזיקליות מורכבות יותר – של כוח, של שדה חשמלי, של שדה מגנטי, זרם, אנרגיה.

אלה הן יחידות מידה שרירותיות למדי. המטר, למשל, הוא יחידה שרירותית לגמרי – הצרפתים החליטו שיחידת האורך הבסיסית תהיה $\frac{1}{40,000,000}$ מהיקף כדור הארץ לאורך קו המשווה (הם לא הצליחו, משום שלא דייקו במדידות). גרם הוגדר כמשקל של סנטימטר מעוקב אחד של מים, בטמפרטורה של 4 מעלות צלזיוס.

אין ערוך לחשיבותן של יחידות. מי שמבין מהי "יחידה" מבין את הקשר בין המתמטיקה לעולם, במיוחד למדע. את היחידות (כולל המילה "יחידה") צריך ללמד כבר בבית הספר היסודי.

איך מלמדים זאת

תיאוריה היא דבר יפה, אבל חשוב עוד יותר איך מלמדים את העיקרון הזה.

הדבר צריך להתחיל בכיתה א': כאשר מלמדים כפל, צריך להדגיש את משמעות ה"פעמים". "תן לי 3 פעמים עיפרון", "ועכשיו תן לי 3 פעמים קבוצה של 4. נכון שזה דומה?"

את לימוד החילוק יש לכרוך, מתחילה, בלימוד "חצי", "שליש", "רבע" וכו' (מה שנקרא בעגה המקצועית "שברים מצריים", כלומר שברים שהמונה שלהם הוא 1). ילדים, אפילו בכיתה א', יכולים להבין שכאשר מחלקים לשלושה חלקים שווים, כל חלק נקרא "שליש". אפשר אז לבקש מן הילדים לצייר 4 פעמים תפוח; עכשיו 2 פעמים תפוח; ופעם אחת תפוח; וחצי פעמים תפוח. בכך מבהירים ש"חצי ממשהו" הוא "חצי פעמים המשהו". עתה יש לעשות זאת כאשר היחידה היא קבוצה: כמה הם 4 פעמים 3 תפוחים? נכתוב: $4 \times 3 = 12$. ו-2 פעמים 3 תפוחים? $2 \times 3 = 6$. פעם אחת 3 תפוחים? נכתוב: $1 \times 3 = 3$. וחצי פעם 3

תפוחים? $1\frac{1}{2} = 3 \times \frac{1}{2}$. כאן המספר $\frac{1}{2}$ הוא אופרטור, כמו שבמנייה "3 תפוחים" הוא אופרטור, שפועל על התפוחים, שהם האופרנד.

הנה, כהדגמה להוראה של מושג השלם, שתי שיחות דמיוניות בין מורה ותלמיד.

שתי שיחות על נושא ה"שלם"

עיקרון נלמד: הדמיון בין מנייה לבין לקיחת שבר ממשוהו. הרעיון ש"חצי מיחידה" הוא "חצי פעמים היחידה".

שיחה ראשונה:

חונך: יש לי כאן תפוחים. מי רוצה למנות אותם?

חניכים: 1,2,3,4

חונך: נכון, יש כאן 4. ארבעה מה?

חניכים: 4 תפוחים.

חונך: בביטוי "4 תפוחים" 4 הוא המספר. מי יודע מהי המילה "תפוחים"?

חניכים: כינוי.

חונך: נכון. הכינוי אומר מה סופרים. עכשיו בואו ניקח את אחד התפוחים, ונחזות אותו לארבעה חלקים שווים (עושה זאת). איך קוראים לכל חלק?

חניכים: רבע.

חונך: רבע מה?

חניכים: רבע תפוח.

חונך: המילה "רבע" אומרת איזה חלק מן התפוח לקחנו. "כמה תפוח". מהי "תפוח"?

חניכים: זהו הכינוי.

חונך: כשאמרנו "ארבעה תפוחים", התפוח היה הכינוי. אם כן, גם ב"רבע תפוח" התפוח הוא הכינוי. אבל בשיעור שעבר קראנו לזה בשם קצת אחר. איך קראנו לדבר שאותו חילקנו? כשחילקנו תפוח לארבעה חלקים, מה היה התפוח?

חניכים: השלם.

חונך: אם כן, במקרה של השבר השלם הוא הכינוי. "רבע משלם" דומה ל"ארבע פעמים השלם". בשניהם השלם הוא הכינוי.

שיחה שנייה:

חונך: פסע שני צעדים קדימה, וספור בקול רם את הצעדים.

חניך – פוסע ואומר.

חונך: עכשיו תעשה חצי צעד, ותאמר בקול רם כמה צעדים עשית.

חניך – פוסע ואומר בקול רם "חצי".

חונך: אפשר לעשות 2 פעמים צעד, ואפשר חצי פעמים צעד. עכשיו אמור לי כמה הם 2 פעמים 4?

חניך: 8.

- חונך : וחצי פעמים 4?
חניך : 2.
חונך : כמה הם 2 פעמים 8?
חניך : 16.
חונך : וכמה הם רבע פעמים 8?
חניך : רבע פעמים 8 פירושו רבע מ-8. כלומר 2.
חונך : ושמינית פעמים 8?
חניך : זה שמינית מ-8, כלומר 8:8, כלומר 1.

* **רון אהרוני** הוא פרופסור למתמטיקה בטכניון, הוזמן לפני שנים אחדות להשתתף בפרויקט של קידום החינוך המתמטי בעיר מעלות. כך זכה להכיר את עולמה המופלא של המתמטיקה של בית הספר היסודי ולחשוף את המשמעויות של פעולות החשבון הפשוטות לכאורה, כמשתקף מן הרשימה.

הוא מחבר הספר **חשבון להורים**, מנחה מורים המלמדים לפי ספרי "מתמטיקה יסודית" (שיטת סינגפור), וחבר בעמותה לקידום החינוך המתמטי לכל.

יוני, 2007