

# המשמעויות השונות של החיסור ותרומתן לפיתוח החשיבה

תלמה גביש

לחיסור 6 משמעויות שונות. היו שנהגו להדגיש בהוראת החיסור את הגריעה, והיו שהעמידו במרכז את משמעות החיסור כהשוואה. בשתי הגישות האלה התעלמו במידה זו או אחרת מהמשמעויות האחרות.

כאשר נתקלו הלומדים בבעיית חיסור בעלת משמעות שונה ממה שלמדו, הם התבלבלו: לא היו בידיהם הכלים לנתח את הבעייה ולהבין למה לפנייהם בעיית חיסור למרות היותה שונה ממה שהכירו. הבהרת המשמעויות של החיסור ושיתוף הילד הלומד בהבדלה ביניהם ובבניית בעיות חיסור בעלות משמעויות שונות, מונעת את הקושי מראש.

המאמר מדגים דרכי הוראה, תוך התבססות על ספרי "מתמטיקה יסודית" [שיטת סינגפור], ומצביע על התרומה של הקניית ההבחנות האלה לפיתוח החשיבה בכלל והחשיבה המתמטית בפרט.

## מבוא

שני תהליכים מנוגדים מלווים את החשיבה המתמטית:

(1) עקרונות משותפים לפעולות שונות;

(2) ריבוי משמעויות של אותן פעולות חשבון.

## דוגמא לעקרונות משותפים

העקרונות המשותפים מסייעים ללומד בהבנת המתמטיקה. הלומד יכול להיעזר בקוהרנטיות של המתמטיקה כדי להשליך חוקיות שהובנה על ידו בתחום אחד של המתמטיקה לתחום אחר שלה. זהו תהליך שמקל על הלמידה, הלומד משתמש בחשיבה אנלוגית ובונה חשיבה אנלוגית בעת ובעונה אחת, תוך שהוא מתמודד עם חומר חדש.

דוגמא לתהליך כזה הוא **המכנה המשותף**.

הילד בכיתה א' פותר או ממציא<sup>1</sup> בעיות מהסוג:

היו לי 7 אגוזים. ליעל היו 2 אגוזים. כמה אגוזים היו לשנינו יחד?

הוא מחבר אגוזים עם אגוזים, כלומר, פריטים בעלי אותו כינוי.

בבעייה מהסוג:

בסל היו 3 סוכריות ו-6 מסטיקים, עליו למצוא את הכינוי **המשותף**: ממתקים, כדי לסיים את הבעייה בשאלה: כמה ממתקים היו בסל?

<sup>1</sup> בספרי "מתמטיקה יסודית" [שיטת סינגפור] מתבקשים תלמידי כיתה א'. כבר מראשית השנה, להמציא סיפורי חשבון רבים ככל האפשר על תופעות המוצגות להם: ציורים בספר, מצבים מתאימים בכיתה ועוד. הבנת בעיות מותנית ביכולת להמציא לבד בעיות מתמטיות. מי שממציא בעיות כאלה חייב להתמודד עם נתונים שבידו ולחפש את הקשרים שנוצרו או שאפשר ליצור בין הנתונים האלה.

גם כאשר עלינו לפתור תרגיל, כמו:  $4 + 523$  אנחנו מחברים את 4 האחדות עם 3 האחדות. כלומר, מחברים מספרים בעלי אותו כינוי.

כאשר הלומד עוסק בחיבור, בחיסור או בהשוואת שברים פשוטים הוא חייב למצוא את המכנה המשותף שלהם, העיקרון של מציאת מכנה משותף כבר מוכר לו, אף כי הדרך להגיע אליו בשברים הפשוטים שונה מהדרכים שהוא הכיר עד לשברים הפשוטים.

בתרגיל:  $1/3 + 1/3 =$  יש כבר מכנה משותף, כמו האגוזים בבעיית החיבור שלעיל, ולא נותר לנו אלא לחבר את המונים, כפי שנעשה בחיבור 7 האגוזים עם 2 האגוזים.

לעומת זאת, בתרגיל  $1/3 + 1/5 =$  חייבים למצוא את המכנה המשותף כדי לבצע את החיבור. בתרגיל הזה הוא יהיה 15 והוא יכיל בתוכו את ה-3 של השליש ואת

ה-5 של החמישית, כמו שהמתקים מכילים בתוכם את הסוכריות והמסטיקים.

מי שהתנסה בשם משותף שנדרש לחיבור, לחיסור ולהשוואה, ומי שבמהלך הלימוד זוכה לתיווך מתאים, שמאפשר לו ליצור את הקשרים בין תהליכי החשיבה, יוכל ביתר קלות להבין את הנושא של המכנה המשותף בשברים. יתירה מזאת, הוא יוכל להיעזר ברעיון של המכנה המשותף, הנדרש בחיבור, בחיסור ובהשוואה גם בתחומים חוץ-מתמטיים. למשל, בהשוואת שתי תקופות היסטוריות יהיה ברור לו שעליו לערוך את ההשוואה בכל פעם על סמך בסיס משותף: מנהגים מול מנהגים, כלכלה מול כלכלה, ארכיטקטורה מול ארכיטקטורה וכו'.

זו רק דוגמא אחת מתוך שפע דוגמאות שבהן יש ביטויים שונים לאותו רעיון, הן בתוך המתמטיקה והן מחוצה לה.

## ריבוי משמעויות לאותן פעולות אריתמטיות

ריבוי המשמעויות לאותה פעולה חשבונית הוא היפוכו של התהליך הקודם. בעוד התהליך הראשון מקל על ההבנה, כי הוא מאגד נושאים שונים סביב גרעין קוגניטיבי זהה, הרי התהליך השני עלול להוות אבן נגף להבנה.

דוגמאות בולטות לכך הן: סוגי החיסור וסוגי החילוק, בהן אותה פעולה חשבונית מתארת מצבים שונים. כלומר, בעיות שונות נפתרות בעזרת אותה פעולה חשבונית.

לומד שלא קיבל תיווך להבחנה בין המשמעויות השונות, לא מצליח לקשר בין המשמעות לפעולה החשבונית הנדרשת. הוא נותר נבוך ומבולבל נוכח בעיות הנפתרות באותה דרך, למרות היותן שונות זו מזו. תחושה כזאת עלולה לעורר חרדת מתמטיקה אצל הלומד, בבחינת: "מה קורה כאן? זה שונה ובכל זאת זה שווה? אני כנראה לא מבין. אני כנראה אינני מסוגל להבין מתמטיקה, אני שונא מתמטיקה. אני רוצה להצליח בבחינה הקרובה, אז אעשה מה שאמרו לי, ודי".

סוג זה של תגובה הוא ניסיון להישרדות-קצרת-מועד של הלומד והוא ערובה לכישלון בעתיד.

ההתעלמות מן המשמעויות השונות, זורעת את זרעי הכישלון כבר בכיתה א', ומעצימה אותם משנה לשנה. המורה-המתווך משתף את הילד בהבנת המשמעויות השונות של הפעולה החשבונית ובהבנת המשתמע ממשמעויות אלה, מונע את החווייה הקשה הזאת. כדי להבין את טיבו של תיווך זה, נבחן את אופיו של החיסור ואת התהליך התיווכי המתרחש בעת הלימוד שלו.

## המשמעויות השונות של החיסור

### חיסור של גריעה

בחיסור הזה נתון שלם. אנחנו מחסרים ממנו כלשהי על ידי העלמה או מסירה או אכילה או גריעה או סילוק או כל פעולת הרחקה שהיא ובודקים מהו החלק שנותר.

דוגמא לבעייה מסוג זה:

היו לי 11 מפתחות בצרור. 2 מפתחות אבדו. כמה מפתחות נותרו?

משמעותה, היה שלם כלשהו שהכיל 11 מפתחות. 2 מפתחות הלכו לאיבוד, כלומר, הם הורחקו מהשלם. בצרור נותרו 9 מפתחות.

התרגיל:

$$9 \text{ מפתחות} = 2 \text{ מפתחות} - 11 \text{ מפתחות}$$

זהו החיסור הבסיסי והטבעי.

### חיסור של הפרדה

בחיסור זה נתון השלם ובתוכו קבוצות שאנו מפרידים ביניהן על ידי חיסור על סמך תכונה מבדלת.

יש לי 11 מפתחות בצרור. 2 מהם גדולים והיתר קטנים. כמה מפתחות קטנים יש לי?

התרגיל:

$$9 \text{ מפתחות} = 2 \text{ מפתחות} - 11 \text{ מפתחות}$$

כפי שרואים מהבעייה שבדוגמה, אין בה כל גריעה. יש בה הפרדה של איברי הקבוצה הכוללת לשתי תת-קבוצות לפי קריטריון שהוחלט עליו. בבעייה זו הקריטריון הוא: גודל.

על אותה קבוצת מפתחות אפשר להמציא בעיות נוספות, כמו:

בצרור 11 מפתחות. 7 מהם אדומים והיתר ירוקים. כמה מפתחות ירוקים בצרור?

הקריטריון שנבחר הפעם להפרדה הוא: צבע.

או:

בצרור 11 מפתחות. 5 מהם מפלסטיק והיתר ממתכת. כמה מפתחות מתכת היו בצרור?

התכונה שנבחרה הפעם להבדלה בין הקבוצות היא: סוג החומר.

ואפשר למצוא עוד תכונות מבדילות, למשל, טיב המפתחות.

האדם שיוצר את ההפרדה מתייחס לתכונה כלשהי המבדילה את תת-הקבוצה מיתר איברי הקבוצה הכוללת. מיגוון של בעיות כאלה מפתח אצל הילדים את כושר ההבחנה ובונה את החשיבה הממיינת, שהילד זקוק לה גם בתחומים חוץ-מתמטיים.

כאשר בעת הדיון בכיתה ילד אחד מוצא תכונה המבדילה קבוצה אחת ממשניה וילד אחר מוצא תכונה אחרת המבדילה תת-קבוצה אחרת מאותה קבוצה כוללת, נוצרת אצל הילדים חשיבה מסתעפת [דיברגנטית].

לדוגמא:

קבוצת פקקים מונחת על שולחן. ילדים מתבקשים להתבונן בה ולהמציא בעיות של חיסור שמתאימות לקבוצה.

ילד א': יש לפני 9 פקקים. 7 מהם כחולים והיתר לבנים. כמה פקקים לבנים לפני?

ילד ב': לפני 9 פקקים. 3 מהם קטנים והיתר גדולים. כמה פקקים גדולים לפני?

ילד ג': יש לי 9 פקקים. 4 מהם עם סמל של בית חרושת והיתר ללא סמל. כמה פקקים ללא סמל יש לי?

ילד ד': על השולחן 9 פקקים. 1 ממתכת והיתר מפלסטיק. כמה פקקים מפלסטיק יש על השולחן?

כל אחד יכול להרכיב בעייה חשבונית מזווית ראייה אחרת. ילדים שלומדים בדרך זו נחשפים לרֵאיוֹת שונות של אותה תופעה ולדרכים מגוונות להתבוננות בתופעות. הם מגלים אספקטים שונים של תופעה, שלא חשבו עליהם מלכתחילה, כך הם לומדים לחפש פתרונות בכיוונים שונים, ונבנית אצלם חשיבה מסתעפת המהווה בסיס פורה ליצירתיות.

### חיסור של השוואה

זהו חיסור שמשווה את מספר האיברים של שלם אחד למספר האיברים של שלם אחר.

דוגמא לבעייה כזאת:

בחדר יש 8 כסאות ו-11 אנשים. כמה כסאות פחות מאנשים נמצאים בחדר?

התרגיל:

$$11 - 8 = 3$$

בחיסור של גריעה ובחיסור של הפרדה הפעולה החשבונית מתרחשת בין איברי הקבוצה הכוללת - השלם. בחיסור של השוואה החיסור מתרחש בין שני שלמים שלא תמיד יש לאיבריהם כינוי משותף. בדוגמא שלפנינו: שלם אחד הוא מספר האנשים, והשני הוא מספר הכסאות.

אנחנו משווים את **כמות** הכסאות ל**כמות** האנשים. כמות היא תכונה שאין לה קשר למהויות של העצמים: היא אינה תלויה בצורתם, בגודלם, בצבעם, בטעמם, בטיבם, בכיוונם או בכל תכונה אחרת שלהם. בגלל אופייה זה אפשר להשוות קבוצות שאין לאיבריהן מכנה משותף, כדי לענות על השאלה שבבעייה מחסרים כסאות מאנשים. התהליך המתמטי הוא יצירת התאמות בין איברי הקבוצות וחישוב מספר האיברים שאין להם "בן זוג" בהתאמה. לכן, בתרגיל יש רק מספרים טהורים, חסרי כינוי.

## חיסור של השלמה לשלם

בחיסור זה נתונים השלם ואחד מחלקיו. עלינו למצוא מהו החלק השני המשלים את החלק הנתון לשלם הנתון.

דוגמא לבעייה מסוג זה:

מיטל קנתה ספר שמחירו 46 ש"ח. היו בידה 35 ש"ח. היא הבטיחה למוכר שתתן לו את יתר הכסף למחרת היום. כמה כסף עליה להביא למוכר כדי לכסות את מחיר הספר?

התרגיל:

$$11 \text{ ש"ח} = 35 \text{ ש"ח} - 46 \text{ ש"ח}$$

החיסור בבעייה זו אינו מתאר תהליך של גריעה, אין כאן הורדה, סילוק, או כל פעולה מסוג של הרחקה מהשלם. אין בבעייה זו הפרדה, במובן של יחסי קבוצה ותת-קבוצות. השלם מורכב משקלים, וחלקיו מורכבים משקלים. כל מרכיבי הבעייה שייכים לאותה קבוצה, יש להם אותו כינוי. זו גם איננה בעייה של השוואה, כי אין כאן שני שלמים שאנחנו משווים את מספר איבריהם.

בעייה זו שייכת לסוג נוסף של חיסור: חיסור של השלמה לשלם. כלומר, כמה חסר לי כדי להגיע אל השלם.

## חיסורים הקשורים לכיוון

בעוד החיסורים של גריעה, הפרדה, השוואה והשלמה לשלם עוסקים בכמויות, הרי החיסורים שעניינם עלייה או ירידה או הליכה אחורה עוסקים בכיוון.

כאשר מלמדים את ההיבטים האלה של החיסור ומעוררים מודעות אצל הילד לאופיים המיוחד, החוקיות המתמטית ברורה יותר.

## חיסור של ירידה / עלייה

דוגמא לבעייה כזאת:

דני גר בקומה ה-11. איתי גר באותו בית בקומה ה-7. כמה קומות צריך דני לרדת כדי לבקר את איתי?

זהו חיסור שאין בו גריעה, כי הקומות לא סולקו, פחתו וכו'. אין בו הפרדה, כי איננו מיינים את הקומות. אין בו השוואה, כי אין בו שני שלמים והשוואה של מספר איבריהם. אין בו השלמה לשלם, שבה נתון השלם ונתון חלק ממנו ואנו מחפשים את החלק החסר. לאור זאת, לפנינו סוג חדש של חיסור.

זהו חיסור שתלוי בכיוון האנכי.

הבעייה יכולה להתנסח כך:

דני גר בקומה ה-11. איתי גר באותו בית בקומה ה-7. כמה קומות צריך איתי לעלות כדי לבקר את דני?

למרות העלייה, המענה לשאלה יחייב אותנו לבצע תרגיל של חיסור.

חישוב הפער בין שתי הקומות דרוש לפתרון, בין אם דני יירד ובין אם איתי יעלה.

ההחלטה לקרוא לקומות במספרים החל בקומת הקרקע שהיא קומת האפס, אוניברסלית, כמוה כמו המושגים: "פני הים", "מתחת לפני הים", "מעל פני הים".

עם זאת, יש בהחלטה זו מידה מסויימת של שרירותיות, כי למרות האוניברסליות של הקרקע כמערכת התייחסות, אפשר לְמַסְפֵּר את קומותיו של הבית החל בקומות שמתחת לפני הקרקע.

הפער בין שתי קומות אינו תלוי בהחלטה זו. הוא היה מתקיים גם אם מניית הקומות הייתה מתחילה החל בקומות שמתחת לפני האדמה, או החל בקומת הקרקע.

ההפרש בין הקומות נותן את מניין הקומות המצויות בין נקודת מוצא כלשהי לבין נקודת סיום כלשהי. והוא יישאר קבוע, בין אם הוא יהיה בין קומה 12 לקומה 7 בבניין שמניית קומותיו מתחילה על פני הקרקע ובין אם הוא יהיה בין קומה 20 לקומה 15 בבית שמניין קומותיו מתחיל בבסיסו המצוי 8 קומות מתחת לפני הקרקע.

אין בחיסור כזה שלם שממנו מפרישים חלק. החיסור הזה מציין **פער** בין שתי נקודות על רצף נתון.

יש להבחין בין 2 סוגים של בעיות בתוך החיסור הזה.

נתבונן בשתי בעיות מייצגות:

(1) הייתי בקומה העשירית. ירדתי 4 קומות. לאיזו קומה הגעתי?

(2) הייתי בקומה העשירית. הגעתי לקומה הרביעית כמה קומות ירדתי?

הבעייה הראשונה קלה יותר. היא מתפתחת לפי סדר העניינים הטבעי. גם הניסוח המילולי שלה "מלווה" את היורד בדרכו.

התרגיל שיוביל לפתרון הוא פשוט:

$$10 - 4 =$$

הבעייה השנייה מתאימה למשוואה:

$$10 - \underline{\hspace{2cm}} = 4$$

שפתרונה, בסופו של דבר, הוא אותו תרגיל של חיסור כמו זה שבבעייה הראשונה:

$$10 - 4 =$$

הקושי בהבנת החיסור של ירידה עלול לנבוע מכך שבגריעה ובהפרדה, השלם הוא המספר הגדול, ממנו מחסרים. בחיסור של ירידה **המספר הגדול אינו השלם**, הוא מציין נקודת מוצא. ילד שלא יבין את ההבדל בין שני אלה עלול להרגיש מבוכה ובלבול כאשר ייתקל בחיסור של ירידה.

הוא יהיה מוטרד משאלות כמו: איפה השלם? אם אין שלם וחלקים, למה זה חיסור? כך הילד עלול להגיע לאותו סיחרור מחשבתי שמוביל לחרדת המתמטיקה. כדי למנוע זאת יש לעורר אצלו את המודעות שזהו סוג נוסף של חיסור עם חוקיות משלו, שגם בתוכה יש הבחנות שונות.

## חיסור של ספירה אחורה

המרכיב השרירותי שקיים בחיסור של ירידה/עלייה תלוי בהחלטה איך לארגן את הרצף המאונך. עם זאת, אין כל קושי בהבנת המושגים "למעלה" "למטה", כי מערכת ההתייחסות היא אוניברסלית, ביחס לכדור הארץ. אפשר לפרש את העלייה והירידה, כמספר הקומות שאנו עולים או יורדים ביחס לכדור הארץ.

לעומת זאת, בחיסור של ספירה אחורה יש החלטה שרירותית על כיווניות: אחורה הוא שמאלה, קדימה הוא ימינה.

מתעוררות שאלות שעלולות להציק ללומד ולבלבלו:

מדוע דווקא "אחורה" זה חיסור ו"קדימה" זה חיבור? מדוע אחורה הוא לשמאל וקדימה הוא לימין? מה הקשר בין "אחורה" לבין העלמותם של תפוחים שאכלנו מתוך קבוצת תפוחים שהיו בקערה בחיסור של גריעה?

סוג זה של חיסור אינו קשור לבעיות מילוליות. הוא בנוי על **מוסכמה** המחייבת את כולם, ויש לו תפקיד חשוב ביצירת אסטרטגייה של חישוב, המתקשרת לציר המספרים.

## האם צריך בכלל ללמד את כל סוגי החיסור?

ההבחנות הדקות בין המשמעויות השונות תורמות תרומה חשובה ביותר לחשיבה המתמטית בפרט ולחשיבה בכלל.

הבחנה דקה כזאת סוללת את הדרך להפנמה, להבנת המבנה של בעיות מתמטיות, ליכולת להמציא בעיות מתמטיות, להבנת חוקיות, להרגל של חיפוש חוקיות ויישומה, לפיתוח גישה למדעים ולתחומים חוץ מדעיים וליצירתיות.

אפשר לטעון שלמרות היות החיסור מכשיר לביטוי יחסים שונים, הוראת כל משמעויות החיסור תהווה עומס על הילד הרך וסופו שיתבלבל.

לעומת דעה זו עומדת הדעה ששיתוף הילד במשמעויות השונות של החיסור מביא אותו להבנה עמוקה של הדרך בה נבנות בעיות, ולהפנמת ההיגיון המתמטי לעומקו. הבנת ההבחנות הדקות דורשת, אמנם, השקעה בזמן ההקנייה, אך השפעתה על ההתייחסות של הילד למתמטיקה עצומה. ילד שלא ישותף בקִי החיסור עלול להיגרר לחרדת מתמטיקה, שמקורה בהרגשה שפעולה חשבונית אחת איננה פעולה אחת. הילד מרגיש שבפעולת החשבון יש מסר כפול ומאיים. חרדה כזאת נפוצה מאוד ומקורה באותה תחושה עמומה שמלווה אנשים רבים כבר מכיתה א', שכאילו אומרים לעצמם:

"משהו אינו כשורה אצלי, אני חש שזה לא אותו דבר ואומרים לי שזה בכל זאת שוב חיסור, איך ייתכן שאותה פעולת חשבון מתייחסת לשתי הבעיות? הרי הבעיות מתארות משהו אחר?"

מאחר שהכל מכבדים את המתמטיקה ומדברים בשבח מי שמבין אותה, הילד שאינו מבין חש איום של ממש על אישיותו ועל הדימוי העצמי שלו. כתוצאה מכך בשעה שעליו להתמודד עם מטלה מתמטית הוא חרד מראש ששוב ייכשל, אולי לא יקלע למטרה, הרי לחיסור משמעויות שונות. חרדה זו גורמת לו שלא יוכל לגייס כוחות למשימה המוטלת עליו. הכישלון ידוע מראש ובעקבותיו מתבססת חרדת המתמטיקה שמונעת הצלחות, וחוזר חלילה.

שיתוף הילד בסוד ההבחנות המתמטיות ימנע את הסחרור שמוביל לחרדת המתמטיקה, ויהווה את הבסיס של ההבנה המתמטית שיהיה הרבה יותר איתן וברור ללומדים.

כדאיות ההשקעה בהקניית המשמעויות השונות של החיסור נובעת גם מהתרומה שלהן לחשיבה בכלל.

## איך ללמד?

אין ספק שלימוד כל המשמעויות בבת-אחת יגרום לעומס יתר.

הוראת החיסור צריכה להיעשות ברוח של תיווך.

תיווך הוא תהליך אינטראקטיבי שמתרחש בין בני אדם ושבעקבותיו מקבל-התיווך [החניך] מעצב דרכי חשיבה ואסטרטגיות שהוא יכול ליישמן בתחומים רבים ומגוונים. בעקבות תיווך עובר מקבל התיווך שינוי פנימי שמחזק אותו הן בתחום הקוגניטיבי והן בתחומים אחרים של האישיות. למשל, גישתו לסוגים שונים של בעיות, לאו דווקא מתמטיות, תשתנה. הוא יפתח את ההרגל לבחון תופעה על כל היבטיה תוך גיוס כוחות נפש לצורך זה. הוא יתכן את צעדיו וישקול איזה מהאספקטים של התופעה רלוונטיים לפתרונות הנדרשים.

ההדדיות במערכת היחסים בין המתווך למקבל התיווך מחייבת שיתוף הילד ברב-המשמעויות של החיסור, מעלה את רמת ההבנה של הילד ומונעת מראש חרדת מתמטיקה.

## כיצד נלמד את כל משמעויות החיסור?

דוגמא טובה להוראה מדורגת ומשמעותית של החיסור אפשר למצוא בספרי **מתמטיקה יסודית** [שיטת סינגפור].

**ספר הלימוד הראשון של כיתה א'** מצביע על תשומת הלב המרובה לאופיו המגוון של החיסור ועל ההקנייה המדורגת של הנושא. נעקוב אחר ההתפתחות של הנושא.

עמוד 12:

הכנה לקראת חיסור של השוואה על ידי התאמה בין איברי שתי קבוצות

עמוד 16:

הכנה לקראת חיסור של הפרדה על ידי הפרדת קבוצות מתוך ציור נתון, שהוא השלם.

עמוד 39:

חיסור של גריעה מלווה בהגדרה: "זהו חיסור. כלומר: מפחיתים, מוציאים, מרחיקים".

עמוד 41 :

שני חיסורים: חיסור של גריעה ושל הפרדה, זה ליד זה, לצורך השוואה והבחנה ביניהם.

עמוד 48:

ספירה אחורה

המשך ההקנייה נעשה גם **בספר לכיתה א' חלק שלישי**:

עמודים 6-13:

השוואה על ידי חיסור.

## **בספר הלימוד הראשון של כיתה ב' יש העמקה של ההבחנות:**

עמודים 22-25

**בספר הלימוד השני של כיתה ב' יש שילוב החיסור במשוואות ובמבנה העשרוני, הכנה לחיסור לשם השלמה לשלם:**

עמודים 6-15

**בספר הלימוד הראשון של כיתה ג' הצגת סכמות המבחינות בין חיסור בתוך קבוצה לבין חיסור של השוואה בין קבוצות, השלמה לשלם ושילוב כסף בפעולות החיסור:**

עמודים 18-21

עמודים 98-101

הפריסה הרחבה, על פני 3 שנות לימוד, של הוראת המשמעויות השונות של החיסור נובעת מהחשיבות הרבה של ההבחנות בין הסוגים השונים של החיסור. הגישה הספירלית, המאפיינת את "מתמטיקה יסודית", מאפשרת תיווך ברמות שונות, כשכל מחזור נבנה על ידי השוואה לסוגי החיסור השונים וזיהוי המבדיל ביניהם.

ספרי "מתמטיקה יסודית" מציגים את החיסורים השונים באופן שמאפשר למורה לבנות מהלכים תיווכיים תוך בנייה מדורגת של החיסור.

הילדים לומדים לשיים [=לתת שם] כל סוג של חיסור, להמציא בעיות לכל סוג של חיסור ולהפוך בעייה של סוג כלשהו של חיסור לבעייה דומה לה מסוג אחר של חיסור.

לשיום כל סוג וסוג של חיסור יש חשיבות רבה בהקניית החומר. בעזרתו ניתן לתקשר עם הילד, הילד מתייק את סוג הבעייה עם התווית השייכת לה ועל ידי כך מתעמקת הבנתו ומתרחשת ההפנמה.

## **דוגמאות לתהליכים תיווכיים בעת ההבחנה בין סוגי החיסור**

הוראה של החיסור על כל משמעויותיו מעשירה ומבססת את הניסיון התיווכי שחוה החניך-מקבל-התיווך.

נציג מספר אינטראקציות כאלה.

בדוגמאות לרב-שיח שמתרחש בכיתה נשתמש בסימנים: מ - מורה, ת - תלמיד, לציון האינטראקציה.

### **דוגמה ראשונה**

#### **הבחנה בין חיסור של גריעה וחסור של הפרדה ברמה ראשונית**

בעמוד 41 בספר הכיתה הראשון של כיתה א' שני ציורים.

בציור העליון:

מצויות 5 צפרדעים על עלה ואחת מהן קופצת למים, מתחת לציור רשום:

$$5 - 1 = 4$$

בציור התחתון:

יש 9 פירות: 3 אננס ו-6 מנגו. מתחתם רשום התרגיל:  $9 - 3 = 6$ .

בכיתות שבהן הילדים עדיין אינם קוראים, המורה קוראת את ההוראה:

"אילו סיפורים חשבוניים מסתתרים בתמונות שלפניכם? ... המציאו סיפור מתאים לכל תרגיל חשבוני."

(בשלב זה מניחים שהילדים אינם יודעים לקרוא בעצמם. בהמשך הלמידה, חלק מהתיווך הוא בניית ההרגל לקרוא בעצמם את ההוראות ולפעול בהתאם להן.)

מ: הסבירו מה מבקשים שנעשה בעמוד זה?

ת: נסתכל בתמונות ונספר מה אנחנו רואים.

מ: במקום להשתמש במילה: "נסתכל" כדאי שנשתמש במילה "נתבונן". האם מישהו יודע מה ההבדל ביניהן?

ת: זה אותו דבר.

מ: יש קירבה בין שתי המילים, אבל מה שחשוב זה דווקא ההבדל ביניהן. "להסתכל" זה רק לראות, "להתבונן" זה גם לראות וגם לחשוב על מה שאנחנו רואים. שימו לב, במילה "להתבונן" מסתתרות המילים: תבונה, הבנה. להתבונן זה להסתכל עם הבנה ושכל. מה אנחנו עושים בעמוד כזה, מסתכלים או מתבוננים?

ת: מתבוננים, כי צריך לחשוב בזמן שמסתכלים.

מ: נתבונן בציור העליון. מה יש בו?

ת: בציור יש עלה בתוך מים. על העלה יש צפרדעים ואחת מהן קופצת למים.

מ: מה עוד יש במסגרת העליונה?

ת: רשום בה תרגיל.

מ: מה אומר התרגיל?

ת: 5 פחות 1 הם 4.

מ: מה הסיפור החשבוני שעלינו לספר?

ת: על העלה ישבו 5 צפרדעים. אחת מהן קפצה למים. על העלה נשארו 4 צפרדעים.

מ: איך נדע שזהו הסיפור המתאים?

ת: יש סימן שהצפרדע קופצת למים, ויש גם תרגיל שאומר שצריך להוריד אחד מחמש. היו 5 צפרדעים, אחת קפצה למים ונשארו 4 צפרדעים. כמו שלמדנו שיש שלם והורדנו ממנו חלק.

מ: מהו השלם?

ת: כל הצפרדעים שעל העלה: 5.

מ: כמה הורדנו?

ת: 1. את הצפרדע שקפצה למים.

- מ : כמה צפרדעים נותרו על העלה?
- ת : 4.
- מ : מי יכול לסכם את מה שלמדנו עד עכשיו?
- ת : בציור יש 5 צפרדעים על עלה. אחת מהן קפצה למים. על העלה נותרו 4 צפרדעים. הסיפור הזה מתאים גם לציור וגם לתרגיל שאומר שהשלם הוא 5 וצריך להוריד ממנו 1.
- מ : נעבור לציור השני. מה יש בו?
- ת : אננס ומנגו.
- מ : איך נוכל לומר זאת במילה אחת?
- ת : פירות.
- מ : נכון. בתמונה יש 9 פירות. פירות של אננס ופירות של מנגו. מה עוד יש במסגרת הזאת?
- ת : תרגיל חשבוני.  $6 = 3 - 9$ .
- מ : מה צריך לעשות?
- ת : לספר את הסיפור החשבוני שמתאים לתרגיל.
- מ : ספרו אותו.
- ת : היו לי 9 פירות בסל. לקחתי 3 מהם ונשארו 6 פירות.
- מ : האם יש בציור איזה רמז של סל ושמישהו לקח את הפירות וסילק אותם?
- ת : לא.
- מ : אבל התרגיל אומר שחיסרנו פירות. האם יש רמז שמישהו אכל את הפירות?
- ת : לא.
- מ : אם כן, מה אומר לנו התרגיל של החיסור?
- ת : אני יודע את הסיפור החשבוני. בסל היו 9 פירות. 3 מהם אננס. כמה מנגו היו ?
- מ : התקדמת יפה מאוד, אבל נלמד לנסח את זה במדויק. בציור יש 9 פירות של אננס ושל מנגו. 3 מהפירות הם אננס. כמה מנגו יש בציור?
- מ : מי יכול להראות לי על השולחן בעזרת פריטי המנייה את מה שעשינו?
- התלמידים מסדרים על השולחן שלהם 9 עצמים כלשהם ש- 3 מהם הם מסוג אחד והיתר מסוג אחר.
- מ : חלי, ספרי לנו מה עשית?
- חלי :
- על השולחן שיתי 9 מקלות 3 מהם ירוקים והיתר צהובים. יש לי 6 מקלות צהובים.
- מ : למדנו שסיפור חשבוני עם שאלה בסופו נקרא : בעייה חשבונית. אסף, ספר לנו מה אתה עשית ומהי הבעייה החשבונית שאתה מציע?
- אסף :
- הנחתי על השולחן 9 פקקים בשני גדלים. 3 מהם היו גדולים. השאלה שלי היא : כמה פקקים קטנים הנחתי על השולחן?

מ : יופי. אני רואה שאתם מבינים. עכשיו יש לי שאלה קשה שדורשת הרבה מחשבה. מה ההבדל בין החלק הראשון של עמוד 41 לבין חלקו השני?

ת : [שגוי] למעלה יש צפרדעים ולמטה יש פירות.

מ : ההבדל הזה באמת קיים, אך הוא אינו העיקר. מהו ההבדל בחשיבה?

ת : למעלה הצפרדע קופצת ועוזבת את הקבוצה. למטה אף פרי אינו עוזב.

מ : מצויין. למעלה חלק מהקבוצה עוזב אותה, נעלם, קופץ וכו' למטה כל הפירות נשארים. אני מבינה למה למעלה זה חיסור, אבל בחלק התחתון של הדף אין סילוק או איבוד, או הורדה, אז למה זה חיסור?

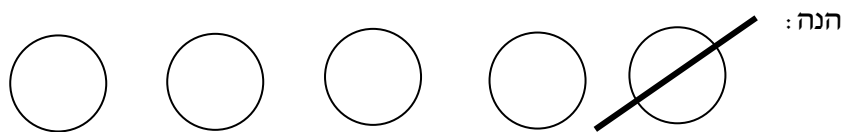
ת : כי היה לנו שלם והפרדנו אותו לשני חלקים. כבר למדנו להפריד את השלם לחלקים.

מ : מעולה. קחו את פריטי המנייה שלכם והראו לנו איזו פעולה עשיתם בהם?

ת : מפרידים את קבוצות הפריטים לשתי קבוצות. אחת מהן מכילה 3 פריטים והאחרת 6 פריטים.

מ : שימו לב, בחיסור הראשון של הצפרדעים, הצפרדע קפצה למים. בציור השני כל הפירות נשארו אבל אנחנו בדמיון שלנו כאילו לקחנו והנחנו את האננס בצד וראינו כמה מנגו נשארו.

אני מציירת על הלוח שני ציורים. מאחר שאינני יכולה לצייר צפרדעים או מנגו או אננס אני אצייר ריבועים ועיגולים.



כל עיגול ייצג, יבוא במקום, צפרדע. מה מספר הציור?

ת : על העלה היו 5 צפרדעים. אחת מהן קפצה למים. כמה צפרדעים נשארו על העלה?

מ : יפה. ננסה לצייר באופן דומה את האננס והמנגו. כיצד נעשה זאת?

ת : מוכרחים לצייר אותם אחרת.

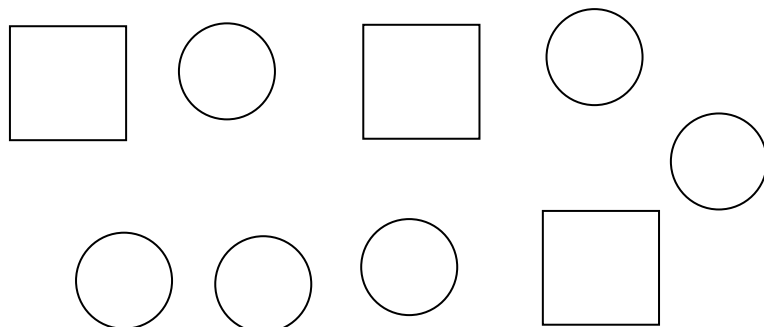
מ : כיצד?

ת : אי אפשר ששניהם יהיו עיגולים.

מ : מצויין. אני מציעה שאת המנגו נייצג בעזרת עיגולים ואת האננס בעזרת ריבועים.

איך נעשה זאת?

ת : מגיע ללוח ומצייר באותו סדר כמו בתמונה שבספר :



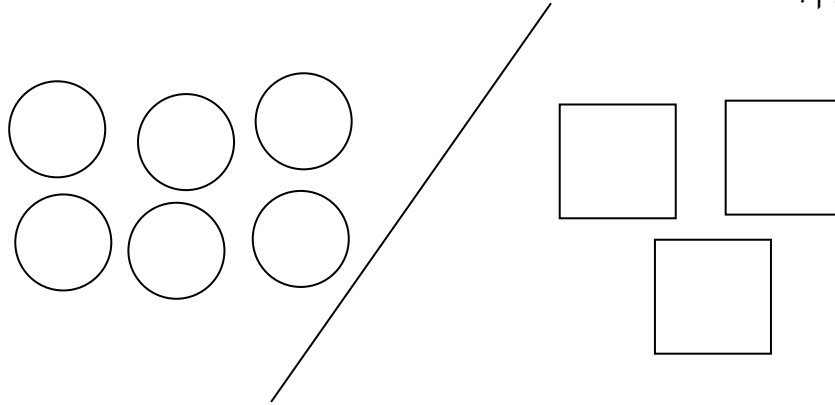
מ : למה ציירת כך?

ת : כך הפירות מסודרים בספר.

מ : זה נכון. האננס והמנגו מעורבבים. מה אנחנו עושים, למעשה, כדי שנוכל לענות על השאלה?

ת : מפרידים ביניהם.

מ : איך?



מ : זה באמת מה שאנחנו עושים במחשבה. אנחנו עושים סדר ומפרידים את האננס מהמנגו. מה מסמן את ההפרדה הזאת?

ת : הקו, וזה שסידרנו לחוד את המנגו ולחוד את האננס.

מ : מה מציין את החיסור בציור עם העיגולים?

ת : הקו שמוחק עיגול [צפרדע].

מ : אתם רואים שיש אפשרות לתאר את ההבדל בין שני התהליכים על ידי ציורים שונים. מי יכול לסכם איך עושים זאת על ידי ציורים?

ת : אם חלק אחד יורד, או נופל, או נשבר, או מתקלקל, מוחקים אותו על ידי קו. אם מפרידים את הקבוצות, מסדרים כל קבוצה מצד אחר של הקו שמפריד ביניהם.

מ : אני מזמינה ילדים. ספרו לי את הסיפור שלהם.

המורה מעמידה 9 ילדים בשורה.

ת : לקחת 9 ילדים.

מ : נכון. עכשיו אני מבקשת מהם משהו. ספרו את הסיפור החשובני.

המורה מבקשת מ-3 מהם לחזור למקומותיהם.

ת : הזמנת 9 ילדים אליך. שלחת בחזרה 3 ילדים. על ידך נותרו 6 ילדים.

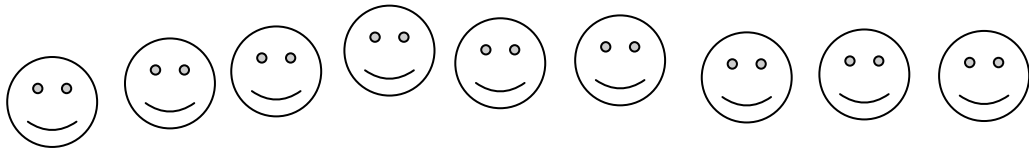
מ : אני רוצה לצייר את מה שעשיתי. מי יציע לי איך לעשות זאת?

ת : ציירי 9 עיגולים. כל עיגול הוא במקום ילד.

מ : אני יכולה לצייר חייכן. כל חייכן ייצג ילד. זה בסדר?

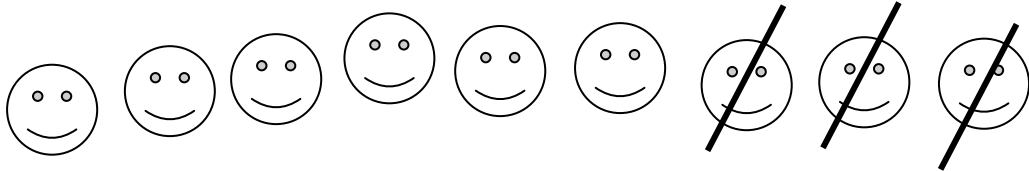
ת : כן.

מ : מציירת :



מ : ומה עכשיו?

ת : תעבירי קו על 3 ילדים. הם כבר לא נמצאים על ידך.



מ : יפה מאוד. עכשיו אני מזמינה ילדים אחרים.

המורה מזמינה 3 בנות ו-6 בנים ומסדרת אותם בשתי קבוצות נפרדות: בנות לחוד, בנים לחוד.

מה הבעיה שאפשר לספר עכשיו?

ת : הזמנת אליך 9 ילדים. 3 מהם היו בנות. כמה בנים הזמנת?

מ : יפה. מה ההבדל בין שתי הפעמים שהזמנתי ילדים?

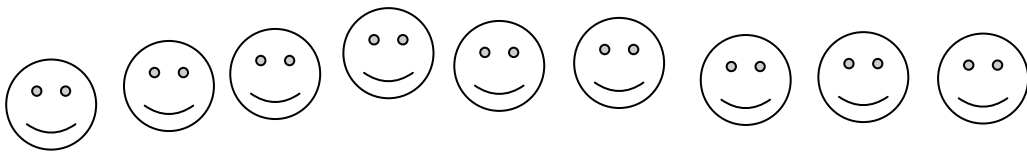
ת : בפעם הראשונה שלחת 3 מהם למקומות ונשארו לידך 6. בפעם השנייה לא

שלחת אותם. הפרדת בין הבנים והבנות.

מ : איך נצייר את מה שעשית?

ת : ציירי 9 חייכנים. כל חייכן הוא ילד.

מ : ציירתי. מה עכשיו?



ת : תפרידי בין הבנים והבנות על ידי קו.

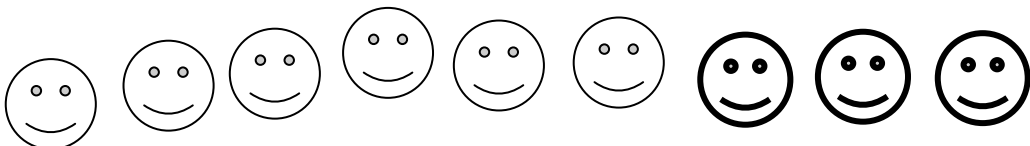
מ : זה רעיון יפה, אבל מה עלי לעשות כדי לצייר קו הפרדה כזה?

ת : לסדר לחוד את הבנים ולחוד את הבנות.

מ : איך אני אדע בציור מי בנים ומי בנות?

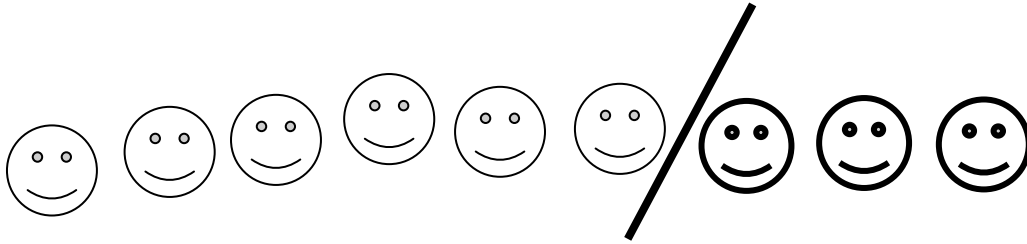
ת : תצבעי את הבנות או את הבנים.

מ : צבעתי את הבנות.



ת: עכשיו תציירי את הקו המפריד.

מ: מי יכול לגשת ללוח ולהראות לכולנו היכן יעבור הקו המפריד?



מ: איך חישבנו כמה ילדים נשארו לידי בפעם הראשונה?

ת: חיסרנו 3 מ-9.

מ: מהו התרגיל המתאים?

ת:  $9 - 3 = 6$

מ: איך חישבנו כמה בניים יש לידי?

ת: חיסרנו 3 מ-9.

מ: מהו התרגיל המתאים?

ת:  $9 - 3 = 6$

מ: שני התרגילים זהים. מה אנחנו לומדים מכך?

ת: התרגילים הם אותם התרגילים, אבל המשמעות היא שונה.

מ: במה היא שונה?

ת: בתרגיל חיסור אחד אנחנו מורידים, בשני אנחנו מפרידים.

מ: הראו זאת בעזרת הפריטים שעל שולחנכם. כמה פריטים יש לכם?

ת: 9.

מ: סלקו מהם 3 פריטים. כמה נשארו לכם?

ת: 6.

מ: עכשיו הניחו לפניכם 9 פריטים. וחפשו דרך להפריד אותם לשתי קבוצות. באחת יהיו 3 פריטים. כמה יהיו בשנייה?

ת: 6.

מ: עכשיו נחזור לעמוד 41 בספר. האם ההבדל החשוב הוא שלמעלה יש צפרדעים ולמטה יש פירות?

ת: לא.

מ: מהו ההבדל החשוב?

ת: למעלה הורדנו מהקבוצה צפרדע אחת. היא כבר לא נמצאת עם הקבוצה. למטה הפרדנו את הקבוצה לשתי קבוצות.

- מ : כאשר אנחנו מחסרים מהקבוצה אנחנו מסלקים, מורידים. מי יכול לומר עוד מילים שבהן תיארנו את החיסור הזה?
- ת : מחסרים, מפחיתים, אוכלים, שוברים, מאבדים, ...
- מ : הייתה מילה נוספת שלמדנו, נסו להיזכר בה.
- ת : גורעים.
- מ : מה פירושה?
- ת : מורידים.
- מ : לסוג של החיסור שבו אנחנו מרחיקים, מוחקים, שוברים, מאבדים וכו' קוראים : חיסור של גריעה. לסוג של החיסור שבו אנחנו מפרידים בין החלקים של השלם קוראים : חיסור של הפרדה. מי יכול לסכם מה למדנו היום?
- ת : למדנו שיש שני סוגים של חיסור : יש חיסור של גריעה ויש חיסור של הפרדה. התרגילים יכולים להיות זהים, אבל המשמעויות שונות. בגלל השוני במשמעויות גם הציור שמתאר את מה שעשינו-שונה. בחיסור של גריעה מחקנו על ידי קו אלכסוני את החלק שהורדנו. בחיסור של הפרדה עשינו סדר, הפרדנו את הקבוצות וציירנו קו שמראה את ההפרדה.
- מ : אני רושמת תרגיל על הלוח ואתם תמציאו לו שתי בעיות חשבוניות. האחת בחיסור של גריעה והשנייה בחיסור של הפרדה.

### הערה למורים

חשוב לזכור שכאשר עוסקים בעיקרון שדורש השקעת אנרגייה בהבנתו כדאי להשתמש בתרגיל קל לחישוב, כמו:  $4 = 3 - 7$ .

### דוגמה שנייה

#### הבחנה והבדלה בין חיסור של גריעה לחיסור של הפרדה

- הדוגמא הבאה תציג תהליך תיווכי בשלב מתקדם יותר של הלמידה של אותו נושא.
- מ : אני מספרת שני סיפורים חשבוניים. חישובו במה הם שווים ובמה הם שונים.
- סיפור א' :
- לרמי היו 9 גולות. הוא מסר 4 מהן לגילי. כמה גולות נשארו לו?
- סיפור ב' :
- לרמי היו 9 גולות. 4 מהן היו אדומות, והיתר ירוקות. כמה גולות ירוקות היו לרמי?
- ת : בשני הסיפורים צריך לחסר.
- ת : השם של הילד הוא אותו שם.
- מ : זה נכון, אבל האם אתם חושבים שהפרט הזה חשוב?
- ת : לא. זה לא העיקר. אפשר לתת לילד בכל בעייה שם אחר. זה לא ישנה את הבעיות.
- מ : מה עוד שווה?

- ת : בשני הסיפורים המספרים הם אותם המספרים : 9 ו-4. התשובה היא 5 גולות.
- מ : למה נתתי אותם המספרים?
- ת : כדי לבלבל אותנו?
- מ : לא. דווקא כדי לסייע לכם. כאשר השמות והמספרים זהים יהיה לכם קל יותר להבין גם את ההבדלים.
- ת : בשני הסיפורים צריך למצוא הפרש.
- מ : זה נכון. מה זה "הפרש"?
- ת : תוצאה של חיסור.
- מ : נכון, אבל אתם כבר אמרתם שצריך לחסר. "צריך לחסר" ו"למצוא הפרש" אילו שני ביטויים שונים לאותה פעולה.
- ת : בשני הסיפורים השלם הוא 9 והוא אומר כמה גולות היו לרמי בסך הכל.
- מ : מצאתם מה שווה בשני הסיפורים. עכשיו צריך למצוא מה שונה ביניהם?
- ת : בסיפור א' רמי מסר את הגולות. חישבנו כמה נשאר לו.
- ת : בסיפור ב' רמי הפריד בין הגולות. חישבנו כמה גולות היו לו בכל קבוצה.
- מ : מצויין. איך קוראים לסוג הראשון של החיסור?
- ת : חיסור של גריעה, כי אנחנו גורעים מהשלם, מורידים ממנו, מעלימים חלק ממנו.
- מ : איך קוראים לסיפורי החשבון מהסוג השני?
- ת : קוראים להם : סיפורי חשבון של הפרדה.
- מ : למה קוראים לסוג זה : הפרדה?
- ת : כי אנחנו לא מורידים, לא מסלקים חלק, אנחנו מפרידים בין החלקים.
- מ : אני מבקשת סיפור חשבון של חיסור שיש בו גריעה.
- ת : היו לי 8 מחברות. 5 מחברות מסרתי לאחותי. כמה מחברות נשארו לי?
- ת : קניתי 7 פחיות שתייה. שתיתי 3 מהן. כמה פחיות מלאות נשארו לי?
- ת : היו לי 9 מחקים. שניים מהם הלכו לאיבוד. כמה מחקים נשארו לי?
- מ : אתם מבינים את סיפורי החיסור שיש בהם גריעה. מי יכול לסכם מה קורה בחיסור שיש בו גריעה?
- ת : יש קבוצה של פריטים, שהיא השלם. אנחנו גורעים, כלומר : מסלקים, מעלימים, שוברים, מקלקלים, לוקחים, חלק מהשלם. אחר כך אנחנו מחשבים כמה נשאר.
- מ : נעבור לסיפורי החשבון שיש בהם הפרדה.
- ת : בכיתה היו 9 ילדים. 7 מהם בניס. כמה בנות היו בכיתה?
- ת : למורה יש 10 טושים בקופסה. 4 מהם ירוקים והיתר כחולים. כמה טושים כחולים יש למורה.
- מ : למה אלו אינם תרגילי גריעה?

ת: הטושים נשאר בקופסה. הם לא הלכו לאיבוד, הם לא התקלקלו, הם פשוט היו בשתי קבוצות. נתנו לנו כמה יש בקבוצה אחת, כמה יש בסך הכל ועלינו למצוא כמה מכילה הקבוצה השנייה.

מ: יפה. אני מבקשת סיפורי חיסור של הפרדה.

ת: יש לי 8 מחברות. 3 מהן עם כריכה צהובה והיתר עם כריכה כחולה. כמה מחברות עם כריכה כחולה יש לי?

ת: קניתי 8 פחיות שתייה. 7 מהן מכילות משקה תוסס. בכמה פחיות יש משקה לא תוסס?

ת: יפה. למה אלו סיפורי הפרדה?

ת: כי שני החלקים של השלם נמצאים. אנחנו לא סילקנו חלק אחד. אנחנו רק הפרדנו ביניהם.

### דוגמה שלישית

#### תיווך בעת לימוד החיסור כהשוואה בכיתה ב'

מ: למדנו על חיסור נוסף. אין בו שלם וחלקים, אין בו נקודת מוצא ובכל זאת הוא חיסור. האם אתם זוכרים אותו?

ת: ???

מ: אני אספר לכם סיפור חשבונני של חיסור כזה. אולי זה יזכיר לכם. היו על העץ 10 ציפורים ו-7 פרפרים. כמה פרפרים פחות מהציפורים היו על העץ?

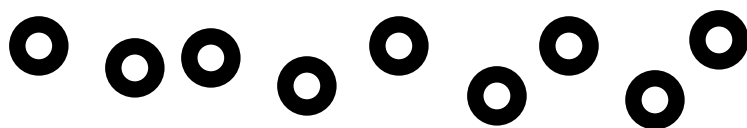
ת: נזכרתי. את מדברת על חיסור כהשוואה.

מ: מה מיוחד בחיסור הזה?

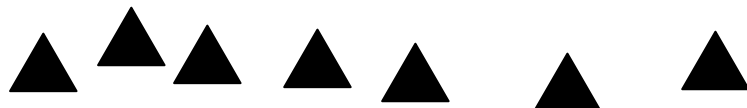
ת: אין בו שלם וחלקים, אין בו נקודת מוצא. יש בו שתי קבוצות שאנחנו עושים התאמה של כל פריט לכל פריט ומוצאים את ההפרש.

מ: נהדר. זה עוד סוג של חיסור, אבל אולי תסבירו לנו על ידי דוגמה למען אלו מבינינו ששכחו? תתחילו במספרים קטנים, כדי שלכולנו יהיה קל יותר.

ת: יש לי כאן קבוצה של 9 טבעות:



יש לי כאן קבוצה של 7 משולשים:



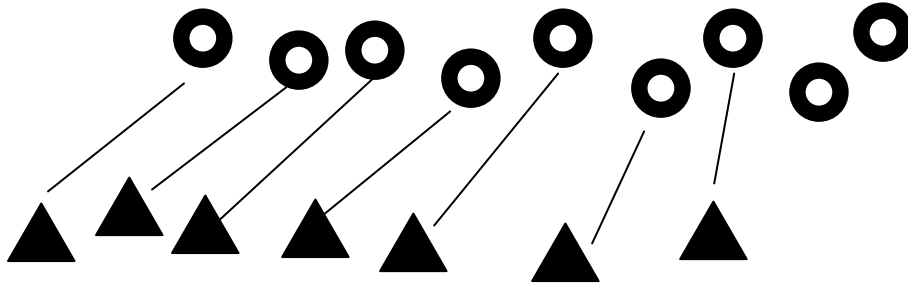
כמה טבעות יותר ממשולשים יש לי?

מ: הדוגמה מצויינת. מי יכול להראות לנו איך עושים את ההשוואה?

ת :

אני מותח קו בין כל פריט של קבוצת הטבעות ושל קבוצת המשולשים.

הנה, כך אני עושה את זה :



אני רואה שנשארו שתי טבעות שאין להן משולש חבר. אין בסיפור הזה שלם, אין בסיפור הזה ספירה אחורה, אין בסיפור הזה נקודת מוצא. יש בו רק התאמות בין החברים של קבוצה אחת לחברים של הקבוצה השנייה, ורואים כמה פריטים נשארו ללא חבר.

מ : יופי. אבל עכשיו כבר התקדמנו ואנחנו יכולים לדעת שלפריטים האלה קוראים : איברים. אנחנו עורכים התאמה בין איברי קבוצה אחת לאיברי הקבוצה השנייה ורואים כמה איברים נשארים ללא ההתאמה הזאת. את מספר האיברים ללא ההתאמה מוצאים על ידי חיסור. זהו חיסור של השוואה.

ת : אני יודע שלחלקים של הגוף שלי קוראים : איברים. זאת אותה מילה?

מ : כן. האיברים של הגוף שלך הם החלקים שבונים את הגוף שלך. כך האיברים של קבוצה הם החלקים הבונים את הקבוצה.

## דוגמה רביעית

### הקניית האסטרטגיה של ספירה אחורה

הספירה אחורה מלווה את לימוד החיסור כאמצעי תומך לחישוב נוח. קודם ספירה רציפה אחורה. אחר כך ספירה בדילוגים, לשם ייעול ושליטה בחישובים.

מטרתה-שליטה במיומנות החישוב וביסוס רב-השיח:

מ : כדי שנוכל לחשב מהר ונוח נספור אחורה. נתחיל במספר 10.

ת : מקהלה מדברת.

[המקהלה המדברת הוא אמצעי ריתמי שמטרתו להקנות את השליטה האוטומטית בחישובים. המקהלה סוחפת עימה גם את החלשים וכך מקטינה את הפער בין המתקדמים למתקשים.]

מ : נספור אחורה מהמספר 20.

ת : הכיתה במקהלה : 20 , 19 , 18 , ...

מ : הספירה אחורה עוזרת לנו לזכור איך לחסר מהר, לכן עכשיו ננסה לספור אחורה בדילוגים של 2. אני אומר את נקודת המוצא. נקודת המוצא היא : 18.

ת : המקהלה המדברת.

מ : עכשיו אני אומר מספר ואתם תספרו אחורה בדילוגים של 3. המספר הפותח יהיה 25.

וכך הלאה.

כאשר ילד מסיים את כיתה א' הוא מכיר כבר:

חיסור של גריעה;

חיסור של הפרדה;

חיסור של ספירה אחורה;

חיסור של השוואה.

הילד מודע להבדלים ביניהם, יודע להמציא בעיות חיסור מסוגים שונים, ולהשתמש בספירה אחורה כטכניקת חישוב.

הוא גם יודע להבחין בין מְנִיָּה שבה למספרים יש כינויים, לבין ספירה שבה יש אך ורק מספרים טהורים, חסרי כינוי.

## בכיתה ב'

### דוגמא חמישית

#### לימוד חיסור של ירידה

מ: למדנו להכיר שני סוגי חיסור: גריעה והפרדה. בשניהם היה לנו שלם ושני חלקים.

יש סיפור של חיסור שאתם מכירים. אין בו שלם וחלקים ויש בו חיסור. מהו?

ת: אני יודע. הסיפור על הכדור.

מ: על איזה כדור אתה מדבר?

ת: על הכדור שהתגלגל במדרגות כשלמדנו על המשוואות.

מ: אולי כדאי להזכיר לנו וגם להסביר?

ת: היה כדור על המדרגה העשירית. הוא התגלגל והגיע למדרגה השישית. כמה מדרגות הוא התגלגל?

מ: כמה מדרגות הוא עבר?

ת: 4.

מ: מה מיוחד בסיפור הזה?

ת: אין בו גריעה, כי המדרגות לא נעלמות או נשברות. אין בו הפרדה, כי אנחנו לא מפרידים את המדרגות זו מזו.

מ: אז מה יש בו?

ת: יש בו ירידה.

מ: זו הבחנה מעולה, אבל יש בסיפור הזה עוד דבר שעושה אותו שונה מהסיפורים הקודמים. מהו?

ת: אין בו שלם וחלקים.

מ: נכון. אמרתם מה אין בו. חישבו מה יש בו?

- ת: יש בו התחלה ויורדים ממנה.
- מ: יופי של תשובה. יש בו נקודת מוצא וממנה יורדים. מי יכול לתת דוגמה של סיפור חשבוני של ירידה, שבו איננו יודעים את נקודת המוצא?
- ת: נמלה ירדה 7 מדרגות והגיעה אל המדרגה העשירית. מאיזו מדרגה החלה לרדת?
- מ: איך נפתור בעייה זאת?
- ת: על ידי המשוואה:  $10 = 7 - \underline{\hspace{2cm}}$ .
- מ: איזה סוג של סיפור חשבוני הוא זה?
- ת: זה סיפור שאין בו גריעה מהשלם, כי היא לא הורידה מדרגות. בסיפור הזה גם אין הפרדה, כי אין בו שלם שמפרידים אותו. יש בו ספירה אחורה מנקודת מוצא.
- מ: התשובה הזאת מצויינת, כי בספירה אחורה באמת אין גריעה, אין הפרדה ואין שלם. יש בו נקודת מוצא וספירה אחורה. בואו נספור ביחד. אני מזכירה לכם. כאשר האצבע שלי מראה כלפי מעלה זו ספירה עולה. כאשר היא מצביעה כלפי מטה זו ספירה יורדת.
- ת: אני מבין. בספירה עולה ויורדת אין שלם. יש פשוט נקודת מוצא.
- מ: נתרגל קצת את המקהלה המדברת, אני מצביעה כלפי מעלה. נקודת המוצא שלי 49. התחילו.
- המקהלה המדברת: 49, 50, 51, 52, ...
- מ: עכשיו אני מצביעה כלפי מטה. נקודת המוצא שלי: 100.
- המקהלה הדוברת: 100, 99, 98, 97, 96, 95, ...
- מ: האם אפשר לספור קדימה ואחורה גם בדילוגים?
- ת: כן.
- מ: אני מזמינה ילד שיבחר את נקודת המוצא, יחליט אם הוא רוצה ספירה עולה או יורדת וגם יודיע לנו באלו דילוגים הוא בוחר. הוא יהיה המנצח על המקהלה.

## כיתה ג'

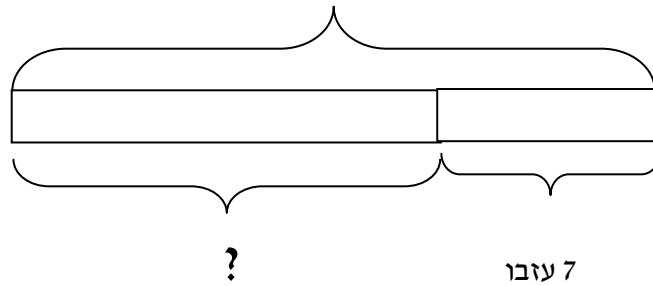
### דוגמה שיטת

#### תרגול המעברים מסוג אחד של חיסור לסוג אחר של חיסור וביסוס המודעות לאופיים של ההבדלים האלה בכיתה ג'.

- מ: אני מבקשת שתמציאו סיפור חשבוני של גריעה על מספרים בגבול העשרת השנייה.
- ת: למסיבה הגיעו 18 ילדים. 7 מהם עזבו וחזרו הביתה. כמה ילדים נשארו במסיבה?
- מ: מי זוכר איך אפשר להציג בתרשים את היחסים בין מרכיבי הבעייה?

18 ילדים

ת:



מ: יפה. מי יכול לשנות את הבעייה ולהפוך אותה לחיסור של הפרדה?

ת: למסיבה הגיעו 18 ילדים. 7 מהם אכלו סופגניות והיתר אכלו ביסלי. כמה ילדים אכלו ביסלי?

מ: למה זה חיסור של הפרדה ולא חיסור של גריעה?

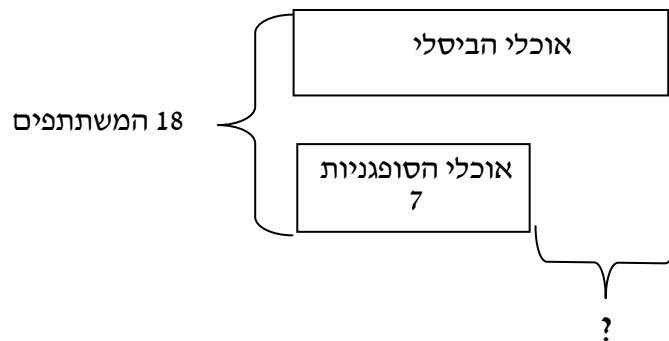
ת: כי 7 הילדים לא עזבו את המסיבה. הם אכלו סופגניות.

מ: מי מוכן לנסות להפוך את החיסור הזה לחיסור של השוואה?

ת: למסיבה הגיעו 18 ילדים. 7 מהם אכלו סופגניות והיתר אכלו ביסלי. כמה ילדים יותר אכלו ביסלי מאשר אלה שאכלו סופגניות?

מ: אם נציג את תרשים היחסים בין מרכיבי הבעייה כיצד הוא ייראה?

ת:



מ: מה עלינו לעשות כדי שנוכל לחשב את ההפרש בין אוכלי הסופגניות לאוכלי הביסלי?

ת: נחשב תחילה כמה אכלו ביסלי.

מ: כיצד עשינו זאת?

ת: בצענו חיסור של הפרדה.

מ: מה קרה אחר כך?

ת: אחר כך השווינו את שני השלמים: אוכלי הסופגניות לעומת אוכלי הביסלי.

מ: איזה חיסור זה היה?

ת: חיסור של השוואה.

מ: מה היה השלם שבעזרתו חישבנו את אוכלי הביסלי?

ת: 18 הילדים, כל מי שבא למסיבה.

- מ : מהו השלם שבעזרתו חישבנו את ההפרש בין אוכלי הביסלי ואוכלי הסופגניות?  
 ת : אנחנו משווים שני שלמים זה לזה : (1) אוכלי ביסלי ; (2) אוכלי סופגניות. זהו חיסור של השוואה.

### דוגמה שביעית

#### חיסור של השלמה לשלם

#### דוגמה לדין בבעייה

נתבונן בבעייה הבאה<sup>2</sup>

אביב קנה חוברת עבודה ומחשבון, ושילם 56.50 שקלים. המחשבון עלה 25.30 שקלים. כמה עלתה חוברת העבודה?

- מ : מה היה עלינו לעשות כדי שנוכל לפתור את הבעייה?  
 ת : לקרוא את הבעייה. לקבוע מה נתון ומה עלינו למצוא.  
 מ : מה נתון ומה עלינו למצוא?  
 ת : נתון השלם וחלק אחד ממנו. עלינו למצוא את החלק השני.  
 מ : כיצד נפתור את הבעייה?  
 ת : נחסר את מחיר המחשבון מהסכום הכולל אותו שילם אביב.  
 מ : איזה סוג של חיסור הוא זה?  
 ת : זהו חיסור של הפרדה.  
 מ : למה?  
 ת : [יובל] שני החלקים שייכים לאותו שלם, לכן זה אינו חיסור של השוואה.  
 מ : זה טיעון נכון, אבל חלקי. אמרת מדוע אין לפנינו חיסור של השוואה, אבל לא אמרת מדוע זה חיסור של הפרדה.  
 ת : אני חושב שיובל מראה לנו דרך איך לדעת איזה חיסור לפנינו. אם אנחנו יודעים שיש חמישה סוגים של חיסור, אז נוכל לאתר את הסוג שלנו על ידי בדיקת הסוגים השונים. למשל, זה לא חיסור של ספירה אחורה, כי ספירה אחורה זו דרך של חישוב ולא דרך לפתור בעיה. זה גם לא חיסור של ירידה, כי לא יורדים כאן.  
 מ : עד עכשיו אמרתם איזה חיסור אינו מתאים לבעיה שלנו. אם נלך בדרך שהצעתם ננסה לראות מה הם סוגי החיסור שעוד לא בדקנו?  
 ת : גריעה והפרדה.  
 מ : האם לפנינו חיסור של גריעה?  
 ת : בגריעה יש הרחקה וסילוק החלק מהשלם. זה לא מתאים לבעיה.

<sup>2</sup> מתוך "מתמטיקה יסודית", ספר הכיתה הראשון לכיתה ג', עמוד 98.

- מ : עד עכשיו שללתם את האפשרויות האלה : השוואה, ספירה אחורה, ירידה וגריעה. האם זה מבטיח שהבעיה שייכת לחיסור של הפרדה? ואולי יש עוד סוג של חיסור? איך תנמקו את הטענה שלפנינו חיסור של הפרדה?
- ת : נתון השלם, נתון חלק אחד של השלם וצריך למצוא את החלק הנוסף. איננו מורידים, מוציאים, מאבדים וכו' את החלק השני. הוא מצוי לצידו של החלק הראשון, על כן זה חיסור של הפרדה. יש כאן הפרדה של השלם לשני מרכיביו [מחיר החוברת ומחיר המחשבון].
- מ : אני מכירה סוג נוסף של בעיות חיסור שם אנחנו עושים **חיסור של השלמה לשלם**. למשל בבעיה הבאה :
- מחיר בגד היה 70 ש"ח. רחל רצתה לקנות אותו. היא נתנה למוכרת 60 ש"ח. כמה כסף עליה להוסיף, כדי שתוכל לקנות את הבגד?
- גם בבעיה זו מצויים שני החלקים זה לצד זה. למה, לדעתכם, קוראים לסוג הזה של החיסור : חיסור של השלמה לשלם?
- ת : כי צריך לדעת כמה כסף צריכה רחל להוסיף כדי לשלם את כל המחיר. מחיר הבגד הוא השלם, יש לנו חלק אחד מתוך השלם ואנחנו מחפשים כמה עלינו להוסיף לאותו חלק כדי לקבל את השלם.
- מ : איך תדעו כמה כסף עליה להוסיף?
- ת : נחסר 60 מ - 70.
- מ : כדי לדעת כמה עליכם להוסיף כדי להשלים את השלם, עליכם לחשב את ההפרש בין השלם לחלק הנתון.
- ת : לדעתי, אפשר לומר שהבעיה של אביב היא השלמה לשלם, כי נתון השלם ונתון חלק אחד ממנו וצריך למצוא את החלק השני שכאשר הוא מצטרף לחלק הראשון מקבלים את השלם.
- מ : אם כך, במה שונה חיסור של הפרדה מחיסור של השלמה לשלם?
- ת : [תמי] אני חושבת שבכלל השלמה לשלם וחיסור של הפרדה הם אותו סוג של חיסור.
- ת : [שושי] ואני חושבת שהם דומים, אבל לא בדיוק אותו סוג.
- מ : אולי תסבירו לנו למה אתם מתכוונים?
- ת : [תמי] בשני הסוגים נתונים שלם וחלק אחד ממנו, ועלינו למצוא את החלק החסר. לא לבטל אותו. רק למצוא אותו.
- מ : שושי, מה דעתך?
- ת : [שושי] בשני החיסורים מוצאים את החלק החסר, שמשלים לשלם. בחיסור של הפרדה קובעים תכונה אחת שמבדילה בין שני החלקים של השלם. בחיסור של השלמה לשלם החלק שמשלים חייב להיות דווקא מהסוג של החלק הנתון ושל השלם. צריך להיות להם אותו כינוי.
- מ : אולי תתני לנו דוגמה על ידי הצגת בעיות מתאימות?
- ת : דוגמה לחיסור של הפרדה :
- בתיק היו 60 מחברות. חלקן מחברות עברית וחלקן מחברות חשבון. כמה מחברות עברית יש בתיק, אם יש בו 20 מחברות חשבון?
- התכונה המבדילה בין שתי הקבוצות היא סוג המחברות : או חשבון, או עברית.
- דוגמה לחיסור של השלמה לשלם :

אורך שטיח הוא 12 מ'. פרשו 5 מ' ממנו. כמה מטרים נוספים חייבים לפרוש כדי שכל השטיח יונח במקומו?

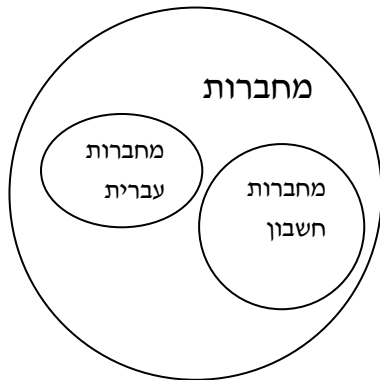
בבעיה הזאת השלם הוא במטרים, החלק הפרוש הוא במטרים ומה שנותר הוא במטרים. הכינוי: "מטרים" משותף לשני החלקים ולשלם.

מ: אני אסכם את הרעיון שלך. בחיסור של הפרדה יש קבוצה כוללת שמכילה בתוכה שתי קבוצות הנבדלות זו מזו בתכונה כלשהי. אנחנו מחפשים כמה איברים יש בכל קבוצה. בחיסור של השלמה לשלם, גם לשלם וגם לחלקיו יש אותו כינוי **בדיוק**. אנחנו מוצאים כמה דברים מאותו סוג נמצאים בחלק החסר.

בבעיה של המחברות, הקבוצה הכוללת הייתה: מחברות. הן הופרדו לשתי **תת-קבוצות**: חשבון ועברית. נאמר לנו כמה מחברות יש **בתת-קבוצה** אחת [מחברות החשבון], כדי למצוא כמה יש **בתת-הקבוצה** השנייה [מחברות עברית] ביצענו חיסור של הפרדה.

בחיסור של השלמה לשלם, כמו בשטיח: הקבוצה הכוללת היא המטרים של השטיח, לשתי הקבוצות החלקיות יש אותו כינוי כמו השלם, הן אינן תת-קבוצה. השלם ושני החלקים הם מאותו סוג.

**קבוצה הופכת להיות תת-קבוצה כאשר היא שייכת לקבוצה הכוללת ויש לה בנוסף לכך תכונה המבדילה ביניהן.**



הכינוי של הקבוצה הכוללת

הוא: **מחברות**.

תת-קבוצה אחת היא:

**מחברות חשבון**.

תת-קבוצה שנייה היא:

**מחברות עברית**.

נחזור לבעיה של אביב. לאור מה שאמרנו כאן, איזה חיסור יש לנו בעמוד?

ת: **חיסור של השלמה לשלם.**

מ: למה טעינו וחשבנו שזהו חיסור של הפרדה?

ת: כי שני החיסורים דומים מאוד, ולא הכרנו את החיסור כהשלמה לשלם.

מ: למה זה חיסור של השלמה לשלם?

ת: נתון לנו שלם וחלק אחד ממנו. לשלם, לחלק הנתון ולחלק החסר יש אותו כינוי. אין ביניהם יחסים של קבוצה כוללת ותת-קבוצה, כל מרכיבי הבעיה שייכים לקבוצת השקלים. צריך למצוא את מחיר חוברת העבודה שמשלימה את מחיר המחשבון לשלם, שהוא כל מה ששילם אביב.

## סיכום בכיתה לכל סוגי החיסור

הסיכום ייעשה על ידי פלקט ושיחה עליו. הפלקט יערך תוך כדי שיעור כשהילדים יהיו שותפים פעילים ביצירתו. הוא יכיל את כל העקרונות שנלמדו. אפשר לחלק את הכיתה, לאחר הכנתה, לשתי קבוצות או יותר שכל אחת מהן תכין את הפלקט שלה ותציג אותו בפני הכיתה.

### דוגמה לפלקט כזה

משמעויות של חיסור					
גריעה	הפרדה	השוואה	השלמה לשלם	ירידה/ עלייה	ספירה אחורה
יש שלם	יש שלם	יש לפחות שתי קבוצות כל קבוצה היא שלם בפני עצמו	יש שלם	יש נקודת מוצא	יש נקודת מוצא
מסלקים חלק	מפרידים בין החלקים, בין תת- הקבוצות.	עורכים התאמה בין איברי קבוצה אחת לאיברי הקבוצה השנייה. מוצאים את ההפרש בין מספר האיברים.	מוצאים כמה יש להוסיף לחלק הנתון כדי לקבל את השלם.	מוצאים את ההפרש בין נקודת המוצא לנקודת הסיום.	סופרים אחורה. מוצאים לאן הגענו, על ידי מציאת ההפרש בין נקודת המוצא ונקודת הסיום.
סיפור לדוגמא	סיפור לדוגמא	סיפור לדוגמא	סיפור לדוגמא	סיפור לדוגמא	סיפור לדוגמא
בחדר היו 8 ילדים. 3 מהם יצאו. כמה נשארו?	בחדר היו 7 ילדים. 5 מהם בנים. כמה בנות?	בילקוט של בועז יש 8 עפרונות ו-2 מחקים. כמה מחקים פחות מעפרונות יש בילקוט של בועז?	לתחרות צריך לשלוח 11 שחקנים. הצליחו למצוא 7 שחקנים. כמה שחקנים נוספים צריך כדי שהקבוצה תהיה מלאה?	בבית רב-קומות יש 10 קומות. אדם ירד במעלית מהקומה העליונה אל הקומה השביעית. כמה קומות ירד?	נערוך ספירה אחורה. נקודת המוצא שלנו תהיה 55, נחסר כל פעם אחד. [אפשר, כמובן, לחסר בדילוגים של יותר מ-1].

ללא ההבחנות בין סוגי החיסור מפסיד הילד מימד מרכזי בהבנה המתמטית.

מנסיוננו ההבחנות הדקות בין סוגי החיסור והחילוק והשיום המדוייק של כל סוג וסוג העלו את רמת המודעות של הילדים, את ביטחונם ביכולתם ואת הבנתם והבחנותיהם גם בתחומים חוץ-מתמטיים. הילדים יודעים לאסוף נתונים, לארגן אותם, למיין את הנתונים, למצוא את מערכות היחסים בין הנתונים, לנסח את מערכות היחסים האלה במילים, להסיק מסקנות ולהתרכז זמן ממושך בפעילות קוגניטיבית. שיעורי המתמטיקה נלמדים בשמחה ובהתלהבות.

דצמבר 2003