מה צריך ללמד את פרחי הוראת המתמטיקה

מהפכת האקדמיזציה במכללות

בשנות השבעים הוחלט במשרד החינוך שמורי מכללות צריכים להיות בעלי תואר דוקטור. זה היה מפנה חד, שרובו לרעה. במקום מורים ותיקים, שיכלו להדריך את פרחי ההוראה בפרקטיקה של ההוראה, ולשמש להם מודל לחיקוי, באו מצד אחד אנשים שעיסוקם בתורות חינוכיות ובמחקר חינוכי, ומצד שני אנשים בעלי תואר דיסציפלינרי. מכיוון שבמאמר זה מדובר על הוראת המתמטיקה – מדובר באנשים בעלי דוקטורט במתמטיקה גבוהה, משהו לא רלבנטי לחלוטין להוראת המתמטיקה בבתי ספר.

הכלל הוא שאדם מלמד מה שהוא יודע, לא מה שתלמידו צריך. למעשה, זוהי טאוטולוגיה - אדם אינו יכול ללמד מה שאינו יודע. מי שיודע סינית עתיקה ישכנע את עצמו שפרח ההוראה זקוק לסינית עתיקה. ומורי המכללות שכנעו את עצמם שמה שתלמידיהם צריכים הוא תורות חינוכיות ופילוסופיה של החינוך מצד אחד, ומתמטיקה גבוהה מצד שני. במאמר הזה אנסה להסביר מדוע זה לא נכון, ומה לדעתי כן נחוץ לפרחי ההוראה.

האם צריך ללמד מורי תיכון מתמטיקה גבוהה?

מי שטוען כך, בוודאי לא היה לאחרונה לא בכיתה ולא בחדר מורים. אין לו מושג עם מה המורים מתמודדים.

לפני כמה שנים הזמינו אותי לתת הרצאת העשרה למורי על יסודי בבית ספר גדול ומבוסס. הכנתי הרצאה על חישוב נפח כדור, כשכוונתי הייתה שהמורים יוכלו להעביר את הנושא הזה לתלמידים טובים. תכננתי להראות את ההוכחה לנוסחה לנפח של פירמידה (הוכחה שלעולם לא ניתנת בתיכון), בעזרת עיקרון שנקרא עקרון קווליירי, ואחר כך איך מחלקים את הכדור לפירמידות קטנות - הייתי מאוד גאה בכל זה. אלא שכהקדמה אמרתי למורים – בואו נתחיל מן המוכר לכם, חישוב שטח של עיגול. שם יש אותם עקרונות, רק בפשוט יותר. התחלתי במה שחשבתי שהוא תזכורת, וזכיתי להתפעלות כללית – מה, ככה מוכיחים את הנוסחה לשטח של עיגול? מתברר שגם את זה המורות לא ידעו. יותר מכך – מן הרגע שהגעתי לפירמידה איבדתי את עניינן של רוב המורות. זו הייתה מתמטיקה גבוהה מדי.

מי שחושב שכדאי ללמד תורת חבורות מתקדמת למי שאינו יודע להוכיח את הנוסחה לשטח עיגול, מרמה את עצמו. וזכרו – מדובר בפרחי הוראה שיצטרכו להורות לתלמידיהם את נוסחת שטח העיגול.

יש הרבה מאוד מתמטיקה אלמנטרית שרוב המורים אינם יודעים. כל מורה יודע ש-π, היחס בין היקף מעגל לקוטרו, הוא בערך 3.14, ושהוא לא מספר רציונלי, אבל לא הרגילו אותו לשאול בעצמו שאלה פשוטה כמו מדוע π גדול מ-3. ומכיוון שלא שאלו אותו, הוא גם לא יבקש מתלמידיו לחשוב על שאלה מסוג זה. שאלו מורה מדוע $\frac{2}{3}=2:3$, או מדוע $\frac{2}{3}$ מ-12 הוא $\frac{2}{3}\times 12$,

או מדוע מספר הוא רציונלי אם ורק אם יש לו פיתוח עשרוני מחזורי, או מהו הקשר בין פיתוח עשרוני מחזורי לבין טורים גיאומטריים אינסופיים, וברוב המקרים תיווכחו שמעולם לא פגש

בשאלות האלה. וכל אלה רלבנטיים מאוד למה שילמד בכיתה. ללמד אותו במקום זאת אנליזה פונקציונלית – הרי זוהי העמדת פנים. העמדת פנים שמה שיש לי למכור לו זה מה שהוא צריך.

הטענה המקובלת שמורה צריך לדעת קצת מעבר לתלמידיו היא נכונה. אבל יש הרבה שהוא קצת מעבר ושהוא רלבנטי למורה, כלומר שייך לעולם המתמטיקה התיכונית. ראשית, הקנו לפרח ההוראה ביטחון במתמטיקה הזאת. תנו לו להרגיש שהוא באמת יודע יותר מתלמידיו על אליפסות ופרבולות, נושאים שאותם הוא מלמד בכיתה, ולא על תת חבורות נורמליות (נושא מתקדם בחבורות.)

בהוראת מתמטיקה לא רלבנטית לא רק שאין תועלת, אלא יש גם נזק. יש בכך שני מסרים רעים, שאותם פרח ההוראה יעביר אחר כך לתלמידיו. האחד: שאפשר ללמד נושא ללא שום צורך בהצדקה, רק משום שזוהי מצוות אנשים מלומדה, וכך החליטו מגבוה. השני, שהמצב הטבעי בכיתה הוא של חוסר הבנה. שכן, חלק גדול מפרחי ההוראה אינם מבינים את המתמטיקה הגבוהה. זוהי עובדה. אלו שמגיעים להוראה אינם דווקא המבריקים ביותר. עובדה מצערת, אבל יש להתמודד איתה כפי שהיא.

האם תורות חינוך מועילות?

מי שחושב שפיאז'ה וויגוצקי רלבנטיים בצורה כלשהי להוראה בתיכון מרמה את עצמו ואת פרחי ההוראה שהוא מלמד. כשמורה עומדת מול כיתה של 40 תלמידים שאינם מעוניינים במה שיש לה להציע, מקימים מהומת אלוהים וחלקם חסרי רקע מספיק כדי ללמוד את הנושא הנוכחי, תורות קוגניטיביות לא מאוד עוזרות.

וצריך להודות פעם אחת ולתמיד: אין הרבה עומק בתורות האלה. כשהגעתי לעולם החינוך למדתי אותן בשקידה, כדי להיות בעניינים. לקח לי כמה זמן להבין שאני עושה זאת רק משום שאמרו לי שזה חשוב. יש בכך הרבה העמדת פנים. ההתפעלות מתורות פיאז'ה נובעת רק מן הרצון לשוות לחקר החינוך אצטלה מדעית.

יש לכם 3 שנים קצרות כדי להכשיר מורה לתפקידו. בעוד שלוש שנים הוא יעמוד מול כיתה, ויצטרך להתמודד עם בעיות מכיוונים שונים. אל תבזבזו את השנים היקרות האלה.

מה כן ללמד את פרחי ההוראה

הדבר המועיל ביותר בהכשרתם של פרחי ההוראה הוא הפרקטיקה. אם רוצים לשלב זאת בהוראת המתמטיקה, יש לתת קורסים על הוראת נושאים ספציפיים. קורס על הוראת פעולות החשבון היסודיות; קורס על הוראת פולינומים; קורס על הוראת משוואות ריבועיות; קורס על הוראת פונקציות וייצוגיהן; קורס אחד לפחות על הוראת מושג הנגזרת; קורס על הוראת גיאומטריה אנליטית.

קורסים כאלה מיועדים גם ללמד את החומר עצמו – ואל יעמיד מישהו פנים שכל החומר הזה מובן ונהיר לכל פרח הוראה. אפשר גם להעמיק הרבה מעבר לחומר שנלמד בתיכון. אבל עיקר המטרה היא ללמוד עקרונות הוראה. כל קורס כזה מלמד את שלבי ההוראה של נושא מתמטי באופן כללי – הצגת הנושא, הצגת הדוגמאות הפשוטות ביותר בו, דרבון התלמידים להמציא דוגמאות בעצמם, גישושים ראשונים, הצגת הכלים לפתרון הבעיות, דירוג התרגילים. בכל קורס

כזה צריכים פרחי ההוראה לבנות מערכי שיעור, להסביר מדוע בחרו במבנה שיעור כזה וכזה, ומה מטרות השיעור. עקרונות אין לומדים במופשט. לומדים אותם מדוגמאות, דרך יישומם בקורסים ספציפיים.

וכדי לקיים את אשר אני דורש, אתן דוגמה קונקרטית. אציג את ראשיתו של קורס אחד כזה, על משוואות ריבועיות.

קורס על דרכי ההוראה של משוואות ריבועיות

שיעור ראשון: איך מציגים משוואות ריבועיות

השיעור הראשון למורים הוא על השיעור הראשון בנושא. כלומר, על איך מציגים את נושא המשוואות הריבועיות. השיעור הראשון בכל נושא הוא החשוב ביותר. ״אין הזדמנות שנייה לעשות רושם ראשון טוב״.

איך, אם כן, מציגים לתלמידים לראשונה את המשוואות הריבועיות? אני עצמי פותח בכך שאני מבקש מן התלמידים דוגמה למשוואה. הם נותנים לי כמובן משוואה ממעלה ראשונה, כמו $3x+3=5x$. אנחנו מנתחים מה יש בה: הנעלם נכפל במספרים קבועים, ויש גם חיבור. אני שואל אם אפשר לעשות פעולות מסובכות יותר. אולי לכפול את הנעלם במשהו אחר, לא במספר קבוע? התלמידים מגיעים לכך שאפשר לכפול את הנעלם בעצמו. למשל, אפשר להסתכל במשוואה $x\cdot x=4$, או בסימון של חזקה - $x^2=4$. משוואה כזו נקראת ״משוואה ריבועית״, או ״משוואה ממעלה 2״, משום שהנעלם מופיע בחזקת 2.

עתה אפשר להביא בעיה מן החיים:

שטח של מגרש ריבועי הוא 121 מטרים רבועים, מהו אורך צלעו?

אם נסמן את אורך הצלע ב-x, המשוואה היא $x^2=121$, שפתרונה הוא $x=11$ - אורך הצלע הוא 11.

עקרונות הוראה שנלמדו בשיעור הזה: לפתוח במקום הידע של התלמיד; לברר היכן נמצאים התלמידים; לשאול מדוע לומדים את הנושא הזה; קישור למציאות; המצאת בעיות עצמית; עידוד לנחוש פתרונות; מטא-קוגניציה (ניתחנו ממה מורכבות משוואות ממעלה ראשונה).

שיעור שני: להמציא משוואות

כמורה, השלב הבא שהייתי בוחר בו הוא לבקש מן התלמידים להמציא משוואות בעצמם. מהי המשוואה הריבועית הפשוטה ביותר שתוכלו להמציא? קרוב לוודאי ש-$x^2=0$. המספר 0 הוא ה״פשוט״ ביותר. מה פתרונה? כמובן $x=0$. המשוואה הבאה בפשטותה היא $x^2=1$. הפתרון שלה הוא $x=1$. אבל אולי יש עוד פתרון? התלמידים ימצאו - $x=(-1)$. המשוואה הבאה בפשטותה: $x^2=2$. מהו פתרונה? אין לזה תשובה פשוטה. מה דעתכם, האם התשובה גדולה מ-1, או קטנה מ-1? 1 בריבוע הוא רק 1, שאינו מספיק. הפתרון גדול מ-1. האם התשובה קטנה מ-$1\frac{1}{2}$, או גדולה יותר?

כל זה חיוני לחלוטין – שיעור כזה, שבו התלמיד מגשש ומבין משוואות על ידי המצאתן והצבה של ערכים אפשריים לנעלם, מועיל יותר להבנת המושגים מאשר תרגול ממושך ומתיש.

העקרונות שלמדנו: עיקרון ראשון שלמדנו הוא המצאה עצמית של בעיות. הוראה בבית ספר מתנהלת בדרך כלל משחק שבו לתלמיד יש תפקיד פסיבי: הוא מחזיר חבטות שהמורה חובט לעברו. המורה שואל, התלמיד עונה. הפסיביות שבדבר נוחה אולי לתלמיד, אבל מעוררת חרדה – "מה תהיה השאלה הבאה? והאם אצליח להשיב?" הדרך הטובה ביותר להעניק לתלמיד תחושה של שליטה בעניינים היא לתת לו להמציא בעיות. המציאו משוואה שפתרונה הוא $x=2$; המציאו משוואה ריבועית שפתרונה $x=0$. כתבו בעיית תנועה פשוטה שהתשובה לה היא "זמן הנסיעה היה 2 שעות".

עיקרון שני: תנו את הדוגמה הפשוטה ביותר האפשרית, ועודדו את התלמידים למצוא דוגמאות פשוטות. מהי המשוואה הריבועית הפשוטה ביותר? מהי בעיית התנועה הפשוטה ביותר שתצליחו לנסח? דוגמה פשוטה מקלפת את הבעיה מן הפרטים הטפלים ומפנה את תשומת הלב אל העיקרון. כיום מלמדים משוואות ריבועיות בכך שמספקים לתלמידים את הנוסחה לחישוב השורשים – האם איזשהו מורה מבקש מן התלמידים ליישם אותה במשוואה הפשוטה ביותר, $x^2=0$, ואחריה במשוואה מן הסוג $x^2=9$?

שיעור שלישי: הגדרה ודוגמאות

לאחר הדוגמאות הראשוניות צריכה לבוא הגדרה. תנו לתלמידים להתחבט בהגדרה. אילו פעולות מופיעות בדוגמאות שנתנו? הגדרה סבירה: משוואה נקראת ריבועית אם הנעלם מופיע בה בחזקות 2 ואולי גם 1. האם נחוצה הגדרה מדויקת יותר? למשל – הפעולות המותרות הן כפל וחיבור, ומותר לכפול את הנעלם בעצמו פעם אחת. הקשר להגדרת "מונום".

ועתה, דוגמאות. הרבה מאוד דוגמאות. עם התנסות. למשל, המשוואות הבאות הן ריבועיות: $x^2=9$, $x^2+x=2$, $3x^2-x=10$, $x^2+2x+1=0$. האם תוכלו למצוא פתרונות פשוטים לכל אחת מהן? האם יש ביניהן משוואות עם יותר מפתרון אחד?

העקרונות שלמדנו: נחיצותה של הגדרה מדויקת. עידוד התלמידים לנסח בעצמם. חשיבות פתיחתו של נושא בהרבה (מאוד) דוגמאות.

שיעור רביעי: איך מציגים את הרעיון שלמשוואה ריבועית יכול להיות יותר מפתרון אחד?

תלמידים מופתעים מאוד מן הרעיון שלמשוואה יכולים להיות יותר מפתרון אחד. "זוהי סתירה", הם טוענים. איך להבהיר להם שהדבר אפשרי? פרחי ההוראה צריכים להגיע אל הרעיון בעצמם: נחוץ להביא מקרה מוכר לילדים. מצב דומה מחשבון, או מטפורה מן החיים. למשל: אם יחפשו בכיתה תלמיד ששם משפחתו הוא כהן, לא יהיה זה פלא אם יהיו שני פתרונות ל"משוואה", כלומר שני ילדים עם שם המשפחה הזה.

עקרון הוראה: שימוש במטפורות.

אעצור כאן, ועל הוראת משוואות ריבועיות אכתוב בפירוט במקום אחר. אני מקווה שהעברתי את המסר: שאפשר ללמד קורס שלם על הוראת המשוואות הריבועיות, ושיש בכך הרבה תועלת. רדו לאדמה. למדו את פרחי ההוראה את מה שהם צריכים.